Chapitre 3 : Chaînes de Markov

Alexandre Blondin Massé

Laboratoire d'informatique formelle
Université du Québec à Chicoutimi

22 mai 2014
Cours 8INF802
Département d'informatique et mathématique

Indépendance

- Jusqu'à maintenant, on supposait l'indépendance entre les différentes variables aléatoires;
- Or, dans plupart des cas, cette hypothèse est inacceptable :
  - Les résultats d'un étudiant à un examen;
  - Les conditions météorologiques;
  - Les traits génétiques;
  - etc.
- Autrement dit, les résultats d'un processus influencent ceux du futur;

Un peu de terminologie

Pour décrire une chaîne de Markov, on procède comme suit :

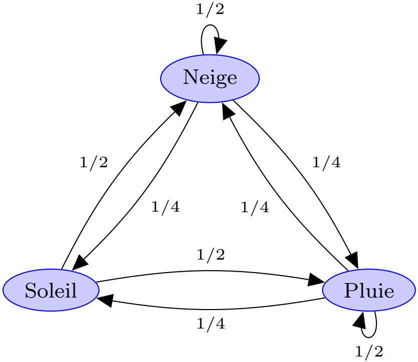
- On se dote d'un ensemble d'états, souvent noté
$$S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_r\};$$
- On appelle déplacement le passage d'un état s à un état t;
- La probabilité de se déplacer d'un état s_i à un état s_j est notée p_{ij} (appelée probabilité de transition);
- À noter que p_{ij} ne dépend que de l'état s_i;

Exemple

Dans le monde d'Oz, la météo se comporte de façon très bizarre;

- Il n'y a jamais deux jours ensoleillés consécutifs;
- Un jour ensoleillé est suivi d'un jour pluvieux ou enneigé (avec la même probabilité);
- Toute journée pluvieuse ou enneigée est suivi d'une journée semblable avec probabilité $1/2$;
- Autrement, si le climat change, il y a une chance sur deux que ce soit pour une belle journée;
- C'est plus pratique de représenter cette chaîne de Markov à l'aide d'une matrice de transition ou un graphe orienté.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$



- Supposons qu'aujourd'hui, il fasse soleil;
- Quelle est la probabilité qu'il fasse soleil dans deux jours ? Dans trois jours ? Dans une semaine ?

Prédictions à long terme

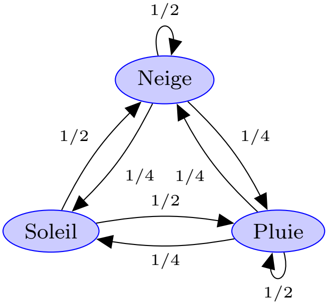
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.500 & 0.250 & 0.250 \\ 0.500 & 0.000 & 0.500 \\ 0.250 & 0.250 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.438 & 0.188 & 0.375 \\ 0.375 & 0.250 & 0.375 \\ 0.375 & 0.188 & 0.438 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.406 & 0.203 & 0.390 \\ 0.406 & 0.188 & 0.406 \\ 0.391 & 0.203 & 0.406 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{20} = \begin{pmatrix} 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \\ 0.400 & 0.200 & 0.400 \end{pmatrix}$$



Marche dans une chaîne de Markov

Théorème

Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov. Alors la probabilité de se trouver dans l'état s_j après avoir effectué n déplacements depuis s_i est donnée par $\mathbf{P}^n[i, j]$.

De plus, si $\mathbf{u}$ est un vecteur de probabilité de la distribution initiale, alors la probabilité de se trouver dans l'état s_i est la i-ème entrée du vecteur

$$\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}\mathbf{P}^n.$$

Propagation d'une rumeur

- Le président des États-Unis dit à A s'il a l'intention de se présenter ou non aux prochaines élections;
- Ensuite, A indique à B ce que le président lui a dit;
- Puis, B dit à C ce que A lui a dit, ainsi de suite;
- Supposons que la probabilité de modifier le message de
  - oui vers non est $a \in [0, 1]$;
  - non vers oui est $b \in [0, 1]$.
- Alors la matrice de transition est

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Génétique

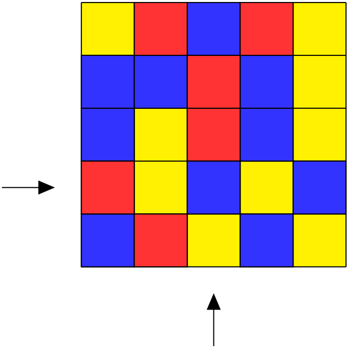
- On s'intéresse au processus de reproduction d'une plante dans lequel on croise chaque plante enfant avec une plante hybride Gg;
- La matrice de transition est

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ GG \\ Gg \\ gg \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} GG & Gg & gg \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.50 & 0.50 & 0.00 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.00 & 0.50 & 0.50 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Si la reproduction se fait avec une plante dominante GG :

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ GG \\ Gg \\ gg \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} GG & Gg & gg \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.50 & 0.50 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 \end{pmatrix} \end{array}$$

Jeu des couleurs (1/2)



- On choisit une cellule au hasard;
- Elle devient de la même couleur qu'un de ses huit voisins.
- Puis on répète le processus.

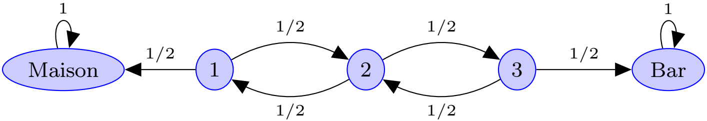
Jeu des couleurs (2/2)

- Supposons qu'il y ait k couleurs et que les dimensions de la grille soient $m \times n$;
- Alors le nombre d'états de la chaîne de Markov associée est k^{mn};
- La matrice de transition (et le graphe) sont donc très grands;
- En revanche, il est facile de simuler cette chaîne de Markov;
- Voir `couleurs.sage`.

États et chaînes absorbants

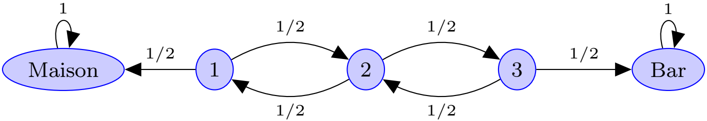
- Dans les exemples précédents, certains états sont tels qu'on ne peut jamais les quitter;
- Un tel état est appelé état absorbant;
- Plus formellement, un état est absorbant si $p_{ii} = 1$;
- Supposons maintenant que la chaîne de Markov
  - possède au moins un état absorbant et
  - tout autre état mène à un état absorbant,
- Alors cette chaîne est dite absorbante.
- Dans une chaîne absorbante, tout état non absorbant est appelé transient.

Marche de l'ivrogne (1/2)



- Un homme se balade sur Park Avenue;
- S'il se trouve au coin d'une rue, alors il marche à gauche ou à droite avec la même probabilité;
- Par contre, s'il atteint sa maison ou le bar, alors il y reste;
- Clairement, les états « Maison » et « Bar » sont absorbants.

Marche de l'ivrogne (2/2)



Plusieurs questions se posent :

1. Quelle la probabilité de terminer dans un état absorbant ?
2. En moyenne, combien de temps cela prend avant d'atteindre un état absorbant ?
3. En moyenne, combien de temps passe-t-on dans chaque état transient ?

Voir `drunkard.sage`.

Forme canonique (1/2)

- Reprenons la matrice de transition pour la marche de l'ivrogne :

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- On permute les lignes/colonnes pour avoir d'abord les états transients puis ensuite les états absorbants :

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} = \begin{array}{c} \\ \text{tr} \\ \text{abs} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{tr} & \text{abs} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right) \end{array}$$

Forme canonique (2/2)

- La n-ième puissance d'une matrice sous forme canonique est donc

$$\mathbf{P}^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{tr} & \text{abs} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{tr} \\ \text{abs} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}^n & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right) \end{array}$$

- En conséquence, on a le théorème suivant :

Théorème

Si un processus évolue dans une chaîne de Markov absorbante, alors la probabilité que le processus soit absorbé est 1, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Q}^n = 0.$$

Matrice fondamentale

- Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov;
- Soit $\mathbf{Q}$ la sous-matrice des états transients;
- Alors la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$ est inversible et son inverse est

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 + \mathbf{Q}^3 + \ldots$$

Ainsi,

Théorème

Si $\mathbf{P}$ est une matrice de transition d'une chaîne de Markov, alors la matrice $\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$, appelée matrice fondamentale de $\mathbf{P}$, indique le nombre de passages dans les états transients, c'est-à-dire que $\mathbf{N}[i, j]$ est le nombre de fois moyen par lequel on passe par l'état s_j si on commence dans l'état s_i.

Retour sur la marche de l'ivrogne

- Reprenons la matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

- Alors

$$\mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Puis

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Temps avant absorption

- Supposons qu'on commence à l'état s_i;
- À combien de déplacements en moyenne devrait-on s'attendre avant d'atteindre un état absorbant ?

Théorème

Soit t_i le nombre moyen de déplacements avant d'atteindre un état absorbant, en supposant qu'on commence dans l'état s_i et soit $\mathbf{t}$ le vecteur colonne dont la i-ème entrée est t_i. Alors

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}\mathbf{c},$$

où $\mathbf{c}$ est un vecteur colonne dont toutes les entrées sont 1.

Probabilité d'absorption dans un état donné

- Souvent, il y a plusieurs états absorbants;
- On peut donc s'intéresser à la probabilité d'atteindre un état absorbant en particulier;
- Rappelons que la matrice de transition est de la forme

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{tr} & \text{abs} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{tr} \\ \text{abs} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right) \end{array}$$

Théorème

Soit b_{ij} la probabilité qu'un processus soit absorbé dans l'état absorbant s_j s'il commence dans l'état transient s_i et $\mathbf{B} = [b_{ij}]$. Alors

$$\mathbf{B} = \mathbf{NR},$$

où $\mathbf{N}$ est la matrice fondamentale.

Retour sur la marche de l'ivrogne (1/2)

On obtient

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{Nc} \\ &= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Retour sur la marche de l'ivrogne (2/2)

Puis

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{NR} \\ &= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} \\ &= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array} \end{aligned}$$

Exercice

- Pour sortir de prison sous caution, Albert doit payer 8 dollars;
- Or, il n'a que 3 dollars sur lui;
- Un gardien accepte de parier avec lui selon les règles suivantes :
  - Si Albert parie A dollars, il gagne A dollars avec probabilité 0.4;
  - Sinon, il perd A dollars avec probabilité 0.6;
- On cherche la probabilité que Albert gagne 8 dollars avant de perdre tout ce qu'il a.
- Quelle stratégie devrait-il utiliser ?

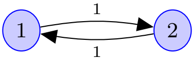
Chaînes non absorbantes

- Jusqu'à maintenant, nous avons vu surtout les chaînes de Markov absorbantes, c'est-à-dire avec un état absorbant accessible de n'importe quel autre état;
- Il existe évidemment des chaînes non absorbantes;
- Les premières sortes de chaînes qui nous intéresseront sont appelées ergodiques;
- On dit qu'une chaîne est ergodique s'il est possible d'atteindre tout état à partir de tout état;
- En d'autres termes, le graphe orienté associé est fortement connexe;
- Dans plusieurs livres, ces chaînes sont aussi appelées irréductibles.

Chaînes régulières

- Certaines chaînes ergodiques sont dites régulières;
- Plus précisément, soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov;
- On dit que la chaîne est régulière, s'il existe un entier n tel que $\mathbf{P}^n$ est strictement positive;
- Ceci signifie que chaque état peut atteindre chaque état en exactement n déplacements;
- Clairement, une chaîne de Markov régulière est ergodique, puisque chaque état peut atteindre tout autre état;
- En revanche, une chaîne de Markov ergodique n'est pas nécessairement régulière.

Chaîne ergodique non-régulière



- La matrice de transition est

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Clairement,

$$\mathbf{P}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Modèle de Ehrenfest

- Modèle utilisé pour expliquer la diffusion des gaz;
- Il y a 2 urnes et b boules;
- À chaque étape, une boule au hasard est choisie et déplacée dans l'autre urne;
- Un état peut être uniquement identifié par le nombre de boules dans la première urne :

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Cette chaîne est ergodique, mais non régulière.

Chaînes régulières

- Toute chaîne de Markov absorbante est non irrégulière;
- Prenons par exemple la matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- On peut facilement se convaincre que $\mathbf{P}^n[1,2] = 0$ pour tout entier $n \geq 0$.

Théorème

Soit $\mathbf{P}$ une matrice de transition d'une chaîne de Markov régulière. Alors il existe une matrice

$$\mathbf{W} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$$

dont toutes les lignes sont égales à un même vecteur de probabilité strictement positif $\mathbf{w}$.

Dans l'exemple météorologique, on a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Propriété stationnaire des chaînes régulières

Théorème

Soit $\mathbf{P}$ une matrice de transition d'une chaîne régulière et

$$\mathbf{W} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n.$$

Soit $\mathbf{w}$ le vecteur commun à toutes les lignes de $\mathbf{W}$ et $\mathbf{c}$ un vecteur colonne dont toutes les entrées sont 1. Alors

1. $\mathbf{wP} = \mathbf{w}$, où $\mathbf{w}$ est l'unique vecteur de probabilité vérifiant cette égalité;
2. $\mathbf{Pc} = \mathbf{c}$ et tout vecteur $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{Px} = \mathbf{x}$ est un multiple de $\mathbf{c}$.

Exemple

- Dans l'exemple du monde d'Oz, on a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- On cherche $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, où $w_1 + w_2 + w_3 = 1$, tel que

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

- Il suffit alors de résoudre le système d'équations et on obtient

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Processus stationnaire (1/2)

Plusieurs propriétés des chaînes régulières sont aussi vraies pour les chaînes ergodiques :

Théorème

Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov ergodique. Alors il existe un unique vecteur de probabilité $\mathbf{w}$ tel que $\mathbf{wP} = \mathbf{w}$, et $\mathbf{w}$ est strictement positif. De plus, tout vecteur $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{vP} = \mathbf{v}$ est un multiple de $\mathbf{w}$ et tout vecteur $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{Px} = \mathbf{x}$ est un vecteur constant.

Processus stationnaire (2/2)

Théorème

Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov ergodique et soit

$$\mathbf{A}_n = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \ldots + \mathbf{P}^n}{n+1}.$$

Alors

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{A}_n = \mathbf{W},$$

où $\mathbf{W}$ est une matrice dont toutes les lignes sont égales à l'unique vecteur de probabilité $\mathbf{w}$ tel que $\mathbf{wP} = \mathbf{w}$.

Loi des grands nombres

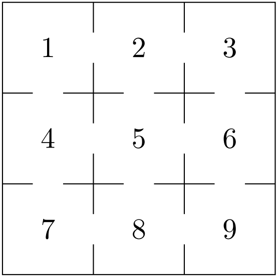
Théorème

Soit $\mathbf{P}$ une matrice de transition et w_j la j-ième entrée du vecteur $\mathbf{w}$ qui est fixé par $\mathbf{P}$. Soit $H_j^{(n)}$ le nombre de passages dans l'état s_j après avoir effectué n déplacements. Alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$P\left(\left|H_j^{(n)} - w_j\right| > \epsilon\right) \to 0,$$

peu importe l'état de départ s_i.

- Considérons le labyrinthe ci-dessous :



- Dans chaque pièce, supposons qu'on choisit un déplacement de façon complètement aléatoire;
- À quel type de chaîne de Markov a-t-on affaire ?

Marche dans un labyrinthe (2/3)

On obtient la matrice de transition suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Marche dans un labyrinthe (3/3)

- Il s'agit clairement d'une chaîne ergodique;
- Par contre, elle n'est pas régulière (pourquoi ?);
- On constate aussi que le vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  vérifie l'équation $\mathbf{xP} = \mathbf{x}$;
- Par conséquent, le vecteur décrivant la probabilité d'être dans un état donné est

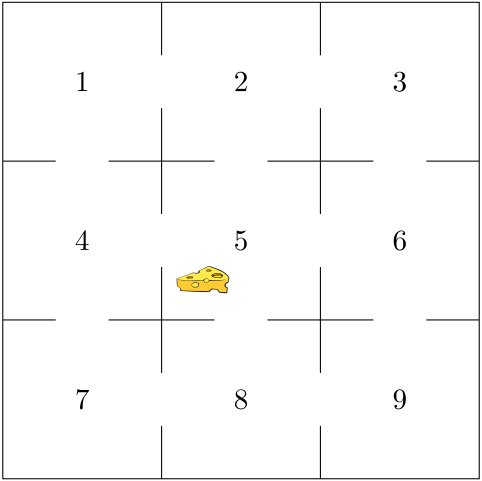
$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1/12 & 1/8 & 1/12 & 1/8 & 1/6 & 1/8 & 1/12 & 1/8 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

Retour et récurrence

- Lorsqu'on a étudié les chaînes absorbantes, nous nous sommes intéressés au temps avant absorption;
- Dans le cas de chaînes ergodiques, on parle plutôt du temps de premier retour, ou de premier passage;
- Le nombre de déplacements moyen effectué à partir de l'état s_i pour atteindre l'état s_j est appelé temps moyen de premier passage;
- Pour calculer ce temps moyen, l'idée est la suivante :
  - On remplace l'état d'arrivée par un état absorbant;
  - On calcule ensuite le temps avant absorption.

Retour sur le labyrinthe (1/4)

Supposons que l'état 5 soit maintenant un état absorbant :



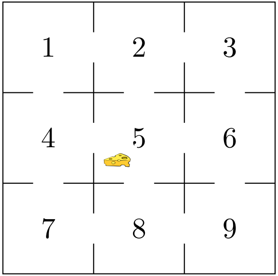
On obtient la matrice de transition suivante :

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 5 \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\
1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

La matrice fondamentale est

$$\mathbf{N} = \frac{1}{8}\ \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 14 & 9 & 4 & 3 & 9 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 14 & 6 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 14 & 9 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 14 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 14 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 9 & 14 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 14 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 3 & 4 & 9 & 14 \end{pmatrix} \end{array}$$

Retour sur le labyrinthe (4/4)



- Le temps avant absorption est donné par

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t.$$

- Ainsi, en moyenne, on doit effectuer 5 déplacements avant d'atteindre le fromage en partant de la pièce 2.

Temps de récurrence moyen

- Une autre quantité d'intérêt est le temps de récurrence moyen;
- Il s'agit du nombre de déplacements moyen à effectuer pour passer d'un état s_i à lui-même;
- Comme la chaîne est ergodique, on retourne nécessairement d'un état à lui-même avec probabilité 1;
- On dénote le temps de récurrence moyen de l'état s_i par r_i.

Théorème

Si $\mathbf{P}$ est une matrice de transition d'une chaîne de Markov ergodique et que $\mathbf{w}$ est le vecteur de probabilité fixe de $\mathbf{P}$, alors

$$r_i = 1/w_i.$$

Notation matricielle

- Soit $\mathbf{M}$ la matrice dont l'entrée (i, j) est le temps moyen de premier passage de l'état s_i à l'état s_j;
- Soit $\mathbf{D}$ la matrice diagonale dont l'entrée (i, i) décrit le temps moyen de récurrence de l'état s_i;
- Soit $\mathbf{C}$ une matrice dont toutes les entrées sont 1;
- On a alors l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{M} = \mathbf{PM} + \mathbf{C} - \mathbf{D},$$

qui se réécrit

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{M} = \mathbf{C} - \mathbf{D}.$$

Matrice fondamentale d'une chaîne ergodique

- Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne ergodique;
- Soit $\mathbf{W} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ la matrice limite;
- Alors la matrice $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W})^{-1}$ est appelée matrice fondamentale;
- La matrice fondamentale a les propriétés suivantes :
  - $\mathbf{Zc} = \mathbf{c}$, où $\mathbf{c}$ est un vecteur dont les entrées sont 1;
  - $\mathbf{wZ} = \mathbf{w}$;
  - $\mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{I} - \mathbf{W}$.
- On peut calculer la matrice de premier passage $\mathbf{M}$ à partir de $\mathbf{Z}$.

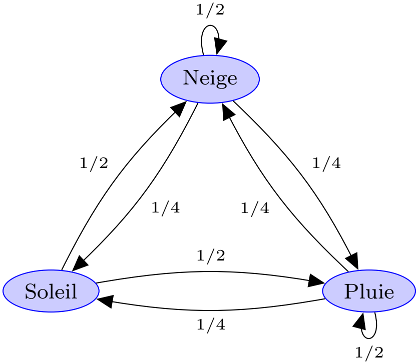
Calcul de la matrice de premier passage

Théorème

Soit $\mathbf{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov ergodique. Soit $\mathbf{Z}$ la matrice fondamentale correspondante et $\mathbf{M}$ la matrice du temps de premier passage moyen. Finalement, soit $\mathbf{w}$ le vecteur de probabilité fixé par $\mathbf{P}$. Alors

$$m_{ij} = \frac{z_{jj} - z_{ij}}{w_j}.$$

Exemple (1/2)



- Reprenons l'exemple de la météo dans le pays d'Oz :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Exemple (2/2)

- On obtient alors

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{W})^{-1} = \begin{pmatrix} 86/75 & 1/25 & -14/75 \\ 2/25 & 21/25 & 2/25 \\ -14/75 & 1/25 & 86/75 \end{pmatrix}$$

- Observons que

$$m_{12} = \frac{z_{22} - z_{12}}{w_2} = \frac{21/25 - 1/25}{1/5} = 4.$$

- Lorsqu'on calcule toutes les entrées, on trouve

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10/3 \\ 8/3 & 0 & 8/3 \\ 10/3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

- Considérons une marche aléatoire sur un cercle de circonférence n;
- À chaque étape, on se déplace dans le sens horaire avec probabilité p, où $0 < p < 1$;
- Sinon, on se déplace dans le sens anti-horaire avec probabilité $1 - p$;
- On se demande les questions suivantes :
  1. Est-ce que cette chaîne est ergodique ? régulière ?
  2. Quelle est la valeur du vecteur $\mathbf{w}$?
  3. Quelle est la valeur de la matrice $\mathbf{M}$ pour $n = 5$ et $p = 1/2$?
  4. A-t-on $m_{ij} = d(n - d)$, pour toute entrée (i, j), où d est la distance entre i et j sur le cercle ?