Chapitre 11 – Valeurs propres – Vecteurs propres

1 Introduction

1. **Problème** : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n avec $0 \leqslant n \leqslant 5$:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 46 & 19 \\ -38 & -11 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 146 & 65 \\ -130 & -49 \end{pmatrix} \quad A^5 = \begin{pmatrix} 454 & 211 \\ -422 & -179 \end{pmatrix}$$

Et combien vaut A^n ?

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2\cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ \\ 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & 2\cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}$$

2. Ce qui est compliqué dans le calcul des puissances d'une matrice, c'est que tous les coefficients se *dispersent* au cours des multiplications :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + db \\ ac + dc & d^2 + bc \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} a^3 + 2bca + bcd & ba^2 + bda + bd^2 + b^2c \\ ca^2 + cda + bc^2 + cd^2 & d^3 + 2bcd + abc \end{pmatrix}$$

Il y a un cas où c'est facile :

Théorème $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

Remarque : Si $\lambda_i \neq 0$ pour tout i, la formule vaut pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3. **Théorème** : Soit P une matrice inversible. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des matrices quelconques et :

$$B_1 = P\,A_1P^{-1} \qquad B_2 = P\,A_2P^{-1} \qquad \ldots \qquad B_n = P\,A_nP^{-1}$$

alors : $$B_1\,B_2\cdots B_n = P\,A_1\,A_2\cdots A_nP^{-1}$$

En particulier : $$B = P\,AP^{-1} \quad \Rightarrow \quad B^n = P\,A^nP^{-1}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} B_1\,B_2\,B_3\cdots B_n &= \left(PA_1\,P^{-1}\right)\left(PA_2\,P^{-1}\right)\left(PA_3\,P^{-1}\right) \;\cdots\; \left(PA_n\,P^{-1}\right) \\ &= PA_1\left(P^{-1}\,P\right)A_2\left(P^{-1}\,P\right)A_3\,(P^{-1} \;\cdots\; P)A_n\,P^{-1} \\ &= PA_1\,I\,A_2\,I\,A_3 \;\cdots\; A_n\,P^{-1} \\ &= PA_1\,A_2\,A_3 \;\cdots\; A_n\,P^{-1} \end{aligned}$$

4. **Méthode** pour calculer A^n connaissant une *matrice inversible* P et une *matrice diagonale* D telles que $A = P\,D\,P^{-1}$: on calcule D^n puis $\boxed{A^n = P\,D^n P^{-1}}$

Exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

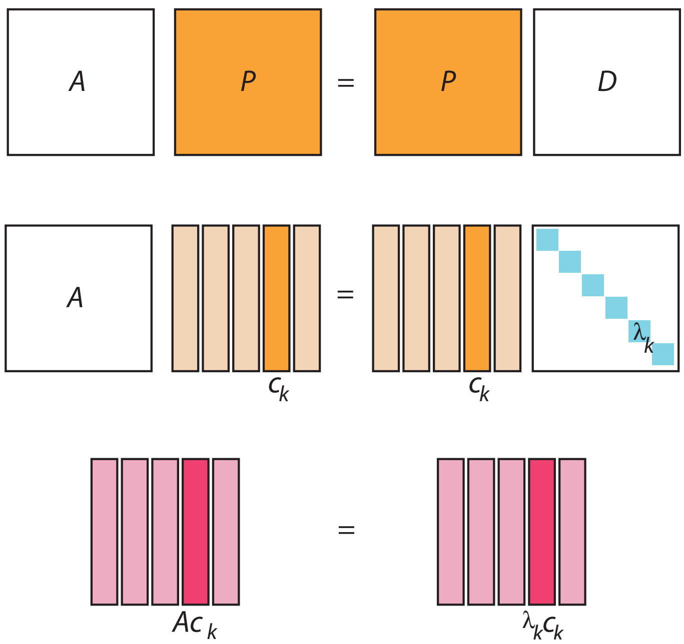
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2\cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & 2\cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}$$

2 Valeurs propres – Vecteurs propres

1. Quand il existe P et D telles que $A = P\,D\,P^{-1}$ ont dit que A est *diagonalisable*.

Une matrice A étant donnée, on cherche ce que pourrait être la matrice P si A était diagonalisable :

$$A = P\,D\,P^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A\,P = P\,D$$



Conclusion : Les colonnes de P doivent forcément vérifier une égalité du type :

$$\boxed{A\,c = \lambda\,c}$$

avec λ un nombre et c une matrice colonne non nulle.

Quand on a une telle égalité, on dit que λ est une *valeur propre* de A et que c est un *vecteur propre* pour la valeur propre λ.

2. Comment trouver des valeurs propres et des vecteurs propres ?
On suppose que A est une *matrice carrée d'ordre p*. On note $\alpha_{i,j}$ ses coefficients et X_i ceux de la colonne c.

L'égalité $Ac = \lambda c$ équivaut au système :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}\, X_1 & + & \alpha_{1,2}\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,p}\, X_p & = & \lambda\, X_1 \\ \alpha_{2,1}\, X_1 & + & \alpha_{2,2}\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,p}\, X_p & = & \lambda\, X_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ \alpha_{p,1}\, X_1 & + & \alpha_{p,2}\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{p,p}\, X_p & = & \lambda\, X_p \end{cases}$$

• Parce que les inconnues sont $X_1, X_2, \ldots, X_p$ et λ, ce n'est pas un système linéaire !

• Si les inconnues étaient seulement $X_1, X_2, \ldots, X_p$, ce serait un système linéaire dont on trouverait les solutions par la méthode du pivot.

$$\begin{cases} (\alpha_{1,1} - \lambda)\, X_1 & + & \alpha_{1,2}\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,p}\, X_p & = 0 \\ \alpha_{2,1}\, X_1 & + & (\alpha_{2,2} - \lambda)\, X_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,p}\, X_p & = 0 \\ \cdots & & & & & & & \\ \alpha_{p,1}\, X_1 & + & \alpha_{p,2}\, X_2 & + & \cdots & + & (\alpha_{p,p} - \lambda)\, X_p & = 0 \end{cases}$$

• C'est un *système linéaire homogène* dont on cherche les *solutions non nulles*.

• Pour que ce système ait une solutions non nulle, il faut et il suffit que le déterminant de $A - \lambda\, I$, sa matrice des coefficients, soit nul.

Théorème : λ est une valeur propre de A si et seulement si $\boxed{\det(A - \lambda\, I) = 0}$.

3. **Théorème** :

$$\wp_A(z) = \det(A - z\,\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - z & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} - z & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,p} - z \end{vmatrix}$$

est un polynôme ; on l'appelle le *polynôme caractéristique* de A.

$$\wp_A(z) = \det(A) + \cdots + (-1)^{p-1} \underbrace{(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} + \cdots + \alpha_{p,p})}_{\mathrm{tr}(A)} z^{p-1} + (-1)^p z^p$$

$\mathrm{tr}(A)$ est la *trace* de A. Les valeurs propres de A sont les nombres λ tels que $\wp_A(\lambda) = 0$.

4. Exemples

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\wp_A(z) = \begin{vmatrix} a - z & b \\ c & d - z \end{vmatrix} = (a - z)(d - z) - bc = (ad - bc) - (a + d)z + z^2$

Exemple 2 : Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix} \quad \wp_A(z) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - z & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ 0 & \alpha_{2,2} - z & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{p,p} - z \end{vmatrix}$$

$$\wp_A(z) = (\alpha_{1,1} - z)(\alpha_{2,2} - z) \cdots (\alpha_{p,p} - z)$$

Exemple 3 : Il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \wp_A(z) = (1-z)(1-z)$$

Si A était diagonalisable, les coefficients diagonaux de la matrice D, vérifiant $\wp_A(\lambda) = 0$ seraient forcément égaux à 1, D serait la matrice identité, et $A = P\,D\,P^{-1} = I$, ce qui est faux. Donc A n'est pas diagonalisable !

5. **Théorème de d'Alembert-Gauss**

Soit $\mathcal{P}$ un polynôme de degré $p \geqslant 1$, à coefficients complexes, dont le coefficient du terme de plus haut degré est α. Alors, il existe des nombres complexes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ et des entiers strictement positifs $m_1, m_2, \ldots, m_s$ tels que :

$$\mathcal{P}(z) = \alpha(z-\rho_1)^{m_1}(z-\rho_2)^{m_2}\cdots(z-\rho_s)^{m_s} \quad \text{avec} \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_s = p$$

Tous ces nombres sont uniques à l'ordre près : les nombres ρ_i sont les *racines* de $\mathcal{P}$, l'entier m_i est la *multiplicité* de la racine ρ_i : quand $m_i = 1$ la racine est *simple*, quand $m_i = 2$ la racine est *double*, quand $m_i = 3$ la racine est *triple*, etc. Dans le cas général, la racine est d'*ordre* m_i.

6. Si λ est une valeur propre de A, les *vecteurs propres* pour la valeur propre λ sont les *solutions non nulles* du système linéaire homogène $(A - \lambda I)X = 0$.

On sait que A possède des valeurs propres et qu'en résolvant ce système par la méthode du pivot, on pourra trouver des vecteurs propres pour faire les colonnes de P.
En aura-t-on assez pour fabriquer une matrice P inversible ?

On note $v(\lambda)$ le nombre d'inconnues non principales du système homogène $(A - \lambda I)X = 0$.

Théorème :

- Si $m(\lambda)$ est la multiplicité de la valeur propre λ on a toujours :

$$\boxed{1 \leqslant v(\lambda) \leqslant m(\lambda)}$$

- La matrice *A est diagonalisable* si et seulement si $v(\lambda) = m(\lambda)$ pour chaque valeur propre λ.

Théorème : Soient A une matrice diagonalisable, λ une valeur propre de A et $m(\lambda)$ sa multiplicité.

- Il y a $m(\lambda)$ *coefficients diagonaux* de D égaux à λ.
- Il y a $m(\lambda)$ *colonnes* de P qui sont des *vecteurs propres pour* λ.
- Si la k^e *colonne* de P est un vecteur propre pour λ, le k^e *coefficient diagonal* de D est égal à λ.

7. **Exemple** : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \wp_A(z) = (2-z)(1-z)^2$

- $\boxed{\lambda = 2}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & 2\,X_1 \\ -8\,X_1 & - & 3\,X_2 & - & 4\,X_3 & = & 2\,X_2 \\ 6\,X_1 & + & 3\,X_2 & + & 4\,X_3 & = & 2\,X_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & 0 \\ -8\,X_1 & - & 5\,X_2 & - & 4\,X_3 & = & 0 \\ 6\,X_1 & + & 3\,X_2 & + & 2\,X_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$v(2) = m(2) = 1$ Le calcul montre que les vecteurs propres sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

• $\boxed{\lambda = 1}$ $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & X_1 \\ -8\,X_1 & - & 3\,X_2 & - & 4\,X_3 & = & X_2 \\ 6\,X_1 & + & 3\,X_2 & + & 4\,X_3 & = & X_3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & 0 \\ -8\,X_1 & - & 4\,X_2 & - & 4\,X_3 & = & 0 \\ 6\,X_1 & + & 3\,X_2 & + & 3\,X_3 & = & 0 \end{array}\right.$

$v(1) = m(1) = 2$ Le calcul montre que les vecteurs propres sont les colonnes $u\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a : $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$

Remarque : Quand $m(\lambda) = 1$, on a $v(\lambda) = 1$ puisque $1 \leqslant v(\lambda) \leqslant m(\lambda)$ et, du coup, $v(\lambda) = m(\lambda)$.

Conséquence : Une matrice qui a toutes ses valeurs propres simples, est diagonalisable.

8. **Cas des matrices réelles** : Quand A est réelle, $\wp_A(z)$ est à coefficients réels.

Théorème :

• Si λ est une valeur propre qui n'est pas réelle, $\overline{\lambda}$ aussi est une valeur propre et $m(\overline{\lambda}) = m(\lambda)$.

• Les vecteurs propres pour $\overline{\lambda}$ s'obtient en conjugant les vecteurs propres pour λ.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \wp_A(z) = (e^{+i\theta} - z)(e^{-i\theta} - z)$

• $\boxed{\lambda = e^{+i\theta}}$ $\left\{\begin{array}{rcrcl} -i\,\sin\theta\,X_1 & - & \sin\theta\,X_2 & = & 0 \\ \sin\theta\,X_1 & - & i\,\sin\theta\,X_2 & = & 0 \end{array}\right.$

les vecteurs propres sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

• $\boxed{\lambda = e^{-i\theta}}$ $\left\{\begin{array}{rcrcl} +i\,\sin\theta\,X_1 & - & \sin\theta\,X_2 & = & 0 \\ \sin\theta\,X_1 & + & i\,\sin\theta\,X_2 & = & 0 \end{array}\right.$

les vecteurs propres sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

3 Exponentielle de matrice

1. Un système différentiel linéaire, homogène, à coefficients constants, est un système du type :

$$\left\{\begin{array}{rclcrcrcccl} X_1'(t) & = & \alpha_{1,1}\,X_1(t) & + & \alpha_{1,2}\,X_2(t) & + & \cdots & + & \alpha_{1,p}\,X_p(t) \\ X_2'(t) & = & \alpha_{2,1}\,X_1(t) & + & \alpha_{2,2}\,X_2(t) & + & \cdots & + & \alpha_{2,p}\,X_p(t) \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ X_p'(t) & = & \alpha_{p,1}\,X_1(t) & + & \alpha_{p,2}\,X_2(t) & + & \cdots & + & \alpha_{p,p}\,X_p \end{array}\right.$$

avec des fonction inconnues $X_1, X_2, \dots, X_p$ de la variable t et des coefficients constants $\alpha_{i,j}$.

En posant $A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p,1} & \alpha_{p,2} & \cdots & \alpha_{p,p} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_p \end{pmatrix}$ le système devient : $\boxed{X'(t) = A\,X(t)}$.

2. **Théorème** : Les solutions d'un tel système sont développables en série entière, avec un rayon de convergence infini.

$$X_k(t) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n\,!} X_k^{(n)}(0) \quad \Rightarrow \quad X(t) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n\,!} X^{(n)}(0)$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(0) + \frac{t}{1!}X_1'(0) + \frac{t^2}{2!}X_1''(0) + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_p(0) + \frac{t}{1!}X_p'(0) + \frac{t^2}{2!}X_p''(0) + \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(0) \\ \ldots \\ X_p(0) \end{pmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} X_1'(0) \\ \ldots \\ X_p'(0) \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} X_1''(0) \\ \ldots \\ X_p''(0) \end{pmatrix} + \cdots$$

3. Par récurrence : $\boxed{X'(t) = A\,X(t)} \Rightarrow \boxed{X^{(n)}(t) = A^n\,X(t)}$ donc :

$$X(t) = X(0) + \frac{t}{1!}A\,X(0) + \frac{t^2}{2!}A^2\,X(0) + \cdots = \underbrace{\left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots\right)}_{e^{tA}} X(0)$$

$$\boxed{X'(t) = A\,X(t)} \Rightarrow \boxed{X(t) = e^{tA}\,X(0)}$$

4. **Exemple** : $\begin{cases} X_1'(t) = 4\,X_1(t) + X_2(t) \\ X_2'(t) = -2\,X_1(t) + X_2(t) \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n A^n}{n\,!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n\,!} \begin{pmatrix} -2^n + 2\cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ 2\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & 2\cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix} = \sum_{n\geqslant 0} \begin{pmatrix} -\frac{2^n t^n}{n\,!} + 2\cdot\frac{3^n t^n}{n\,!} & -\frac{2^n t^n}{n\,!} + \frac{3^n t^n}{n\,!} \\ 2\cdot\frac{2^n t^n}{n\,!} - 2\cdot\frac{3^n t^n}{n\,!} & 2\cdot\frac{2^n t^n}{n\,!} - \frac{3^n t^n}{n\,!} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t} + 2e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & 2e^{2t} - e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{pmatrix}$$

$$X_1(t) = \big(-X_1(0) - X_2(0)\big)e^{2t} + \big(+2X_1(0) + X_2(0)\big)e^{3t}$$

$$X_2(t) = \big(+2X_1(0) + 2X_2(0)\big)e^{2t} + \big(-2X_1(0) - X_2(0)\big)e^{3t}$$