Plan

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Définition

On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.
On appelle B matrice inverse de A et on la note

$$A^{-1}$$

Remarque :
Ecrire $\frac{B}{A}$ n'a pas de sens a priori parce que toute matrice n'a pas d'inverse et qu'on ne sait pas s'il faut multiplier B par l'inverse de A à gauche ou à droite.

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Définition

On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.

On appelle B matrice inverse de A et on la note

$$A^{-1}$$

Remarque :

Ecrire $\dfrac{B}{A}$ n'a pas de sens a priori parce que toute matrice n'a pas d'inverse et qu'on ne sait pas s'il faut multiplier B par l'inverse de A à gauche ou à droite.

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Définition

On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.
On appelle B matrice inverse de A et on la note

$$A^{-1}$$

Remarque :
Ecrire $\dfrac{B}{A}$ n'a pas de sens a priori parce que toute matrice n'a pas d'inverse et qu'on ne sait pas s'il faut multiplier B par l'inverse de A à gauche ou à droite.

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Définition

On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$.
On appelle B matrice inverse de A et on la note

$$A^{-1}$$

Remarque :
Ecrire $\dfrac{B}{A}$ n'a pas de sens a priori parce que toute matrice n'a pas d'inverse et qu'on ne sait pas s'il faut multiplier B par l'inverse de A à gauche ou à droite.

Proposition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, inversibles.

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Proposition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, inversibles.

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Proposition

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, inversibles.

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Plan

Soit A une matrice carrée d'ordre n, inversible. Calcul de l'inverse de A : il existe plusieurs méthodes

1. par résolution du système linéaire $Ax = y$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
2. par la méthode des cofacteurs (utilise la notion de déterminant d'une matrice)
3. par la méthode du pivot de Gauss-Jordan

Bordeaux INP
ENSTBB

Soit A une matrice carrée d'ordre n, inversible. Calcul de l'inverse de A : il existe plusieurs méthodes

1. par résolution du système linéaire $Ax = y$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
2. par la méthode des cofacteurs (utilise la notion de déterminant d'une matrice)
3. par la méthode du pivot de Gauss-Jordan

Soit A une matrice carrée d'ordre n, inversible. Calcul de l'inverse de A : il existe plusieurs méthodes

1. par résolution du système linéaire $Ax = y$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
2. par la méthode des cofacteurs (utilise la notion de déterminant d'une matrice)
3. par la méthode du pivot de Gauss-Jordan

Bordeaux INP
ENSTBB

Soit A une matrice carrée d'ordre n, inversible. Calcul de l'inverse de A : il existe plusieurs méthodes

1. par résolution du système linéaire $Ax = y$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
2. par la méthode des cofacteurs (utilise la notion de déterminant d'une matrice)
3. par la méthode du pivot de Gauss-Jordan

Bordeaux INP ENSTBB

Résolution du système linéaire $Ax = y$: exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E) : Ax = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_3 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_1 + 3x_3 & = & y_2 - 2y_3 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & y_2 - 2y_3 - 3(y_1 - y_3) \end{cases}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Résolution du système linéaire $Ax = y$: exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E) : Ax = y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_1 + 3x_3 & = & y_2 - 2y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & y_2 - 2y_3 - 3(y_1 - y_3) \end{array} \right.$$

Bordeaux INP ENSTBB

Résolution du système linéaire $Ax = y$: exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E) : Ax = y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_1 + 3x_3 & = & y_2 - 2y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & y_2 - 2y_3 - 3(y_1 - y_3) \end{array} \right.$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Résolution du système linéaire $Ax = y$: exemple avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E) : Ax = y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + x_2 + x_3 & = & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_1 + 3x_3 & = & y_2 - 2y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & y_2 - 2y_3 - 3(y_1 - y_3) \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & -3y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_3 & = & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & -3y_1 + y_2 + y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_3 & = & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 & = & y_1 - y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ -2x_1 & = & -3y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 & = & y_3 \\ x_3 & = & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

De $Ax = y$, en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient

$$x = A^{-1} y$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP ENSTBB

On a donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

De $Ax = y$, en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient

$$x = A^{-1} y$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

De $Ax = y$, en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient

$$x = A^{-1} y$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Plan

Ce qui suit nécessite de connaître la notion de déterminant d'une matrice...(à voir après le diapo Déterminant donc !).

Théorème

$detA \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible.
De plus si A est inversible alors

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$$

Ce qui suit nécessite de connaître la notion de déterminant d'une matrice...(à voir après le diapo Déterminant donc !).

Théorème

$detA \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible.

De plus si A est inversible alors

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$$

Méthode des cofacteurs

Définition

On appelle matrice des cofacteurs, $C = com(A)$, la matrice de coefficients

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det A_{ij}$$

Théorème

si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t(com(A)).$$

Méthode des cofacteurs

Définition

On appelle matrice des cofacteurs, $C = com(A)$, la matrice de coefficients

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det A_{ij}$$

Théorème

si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^{t}(com(A)).$$

Méthode des cofacteurs

Définition

On appelle matrice des cofacteurs, $C = com(A)$, la matrice de coefficients

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det A_{ij}$$

Théorème

si A est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^{t}(com(A)).$$

Méthode des cofacteurs: exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad det(A) = -2$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Méthode des cofacteurs: exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad det(A) = -2$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Méthode des cofacteurs: exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad det(A) = -2$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode des cofacteurs: exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad det(A) = -2$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\quad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Bordeaux INP
ENSTBB

Méthode des cofacteurs: exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad det(A) = -2$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Méthode du pivot de Gauss-Jordan

On associe à la matrice A à inverser, la matrice I_n. On transforme A et I_n simultanément par les mêmes opérations élémentaires sur les lignes, l'objectif final étant de transformer A en I_n. La transformée de I_n correspondante est l'inverse de A

Méthode du pivot de Gauss-Jordan
On associe à la matrice A à inverser, la matrice I_n. On transforme A et I_n simultanément par les mêmes opérations élémentaires sur les lignes, l'objectif final étant de transformer A en I_n. La transformée de I_n correspondante est l'inverse de A

Méthode du pivot de Gauss-Jordan

On associe à la matrice A à inverser, la matrice I_n. On transforme A et I_n simultanément par les mêmes opérations élémentaires sur les lignes, l'objectif final étant de transformer A en I_n. La transformée de I_n correspondante est l'inverse de A