§1. Vecteurs

§1. Vecteurs

Définition. On appelle un vecteur réel en dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.

§1. Vecteurs

Définition. On appelle un vecteur réel en dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.

On utilise $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ etc. pour désigner ces vecteurs.

§1. Vecteurs

Définition. On appelle un vecteur réel en dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.

On utilise $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ etc. pour désigner ces vecteurs.

Voici quelques vecteurs spéciaux (avec leurs noms réservés)

§1. Vecteurs

Définition. On appelle un vecteur réel en dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.

On utilise $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ etc. pour désigner ces vecteurs.

Voici quelques vecteurs spéciaux (avec leurs noms réservés)

$\vec{\mathbf{0}} =$

§1. Vecteurs

Définition. On appelle un vecteur réel en dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.

On utilise $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ etc. pour désigner ces vecteurs.

Voici quelques vecteurs spéciaux (avec leurs noms réservés)

$$\vec{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

§1. Vecteurs

Définition. On appelle un vecteur réel en dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.

On utilise $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ etc. pour désigner ces vecteurs.

Voici quelques vecteurs spéciaux (avec leurs noms réservés)

$$\vec{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

§1. Vecteurs

Définition. On appelle un vecteur réel en dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.

On utilise $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ etc. pour désigner ces vecteurs.

Voici quelques vecteurs spéciaux (avec leurs noms réservés)

$$\vec{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_2}} =$$

§1. Vecteurs

Définition. On appelle un vecteur réel en dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.

On utilise $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ etc. pour désigner ces vecteurs.

Voici quelques vecteurs spéciaux (avec leurs noms réservés)

$$\vec{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

§1. Vecteurs

Définition. On appelle un vecteur réel en dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.

On utilise $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ etc. pour désigner ces vecteurs.

Voici quelques vecteurs spéciaux (avec leurs noms réservés)

$$\vec{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_3}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}, \cdots, \vec{\mathbf{e_n}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}.$$

§1. Vecteurs

Définition. On appelle un vecteur réel en dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.

On utilise $\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ etc. pour désigner ces vecteurs.
Voici quelques vecteurs spéciaux (avec leurs noms réservés)

$$\vec{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_3}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}, \cdots, \vec{\mathbf{e_n}} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Les $\vec{\mathbf{e_1}}, \cdots, \vec{\mathbf{e_n}}$ constituent les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple.

En dimension 2 : $\vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Exemple.

En dimension 2 : $\vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et en dimension 3 :

Exemple.

En dimension 2 : $\vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et en dimension 3 :

$$\vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e_2}} = \qquad\qquad, \vec{\mathbf{e_3}} = \qquad\qquad .$$

Si on liste en colonne les notes d'un élève au Bac , c'est un vecteur en quelle dimension ?

Exemple.

En dimension 2 : $\vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et en dimension 3 :

$\vec{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{e_2}} =$, $\vec{\mathbf{e_3}} =$.

Si on liste en colonne les notes d'un élève au Bac , c'est un vecteur en quelle dimension ?

matière	Note	
maths		
Physique Chimie		
SVT		
Histoire Géo		
Français		Réponse : en dimension 9
Philosophie		
LV 1		
LV 2		
EPS		

Opérations permises dans $\mathbb{R}^n$

addition, soustraction ou multiplication par un scalaire, ou une combinaison de ces opérations, appelée combinaison linéaire.

Exemples : $3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \qquad$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \qquad$,
$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\vec{\mathbf{e_1}} + 2\vec{\mathbf{e_2}} = \qquad$.

Opérations permises dans $\mathbb{R}^n$

addition, soustraction ou multiplication par un scalaire, ou une combinaison de ces opérations, appelée combinaison linéaire.

Exemples : $3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$,
$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\vec{\mathbf{e_1}} + 2\vec{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} a-3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Opérations permises dans $\mathbb{R}^n$

addition, soustraction ou multiplication par un scalaire, ou une combinaison de ces opérations, appelée combinaison linéaire.

Exemples : $3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$,
$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} + 2\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} a-3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

On peut aussi décomposer en combinaison linéaire :
$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\vec{\mathbf{e}}_1 + b\vec{\mathbf{e}}_2$.

Opérations permises dans $\mathbb{R}^n$

addition, soustraction ou multiplication par un scalaire, ou une combinaison de ces opérations, appelée combinaison linéaire.

Exemples : $3\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$,
$a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + 3\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} + 2\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix}a-3\\11\end{pmatrix}$.

On peut aussi décomposer en combinaison linéaire :
$\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - 3\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}$, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a\vec{\mathbf{e}}_1 + b\vec{\mathbf{e}}_2$.

Décomposer $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ en combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ revient à chercher des coefficients x et y tels que $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Ceci revient à résoudre le système $\begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

$x = -1, y = 5$

§2. Matrices

Définition. On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

§2. Matrices

Définition. On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Exemples : $(1\ 2)$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & \pi\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & \pi\\a & b\end{pmatrix}$, $\cdots$

On utilise en générale des lettres capitales A, B, M etc. pour désigner des matrices.

§2. Matrices

Définition. On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Exemples : $(1\ 2)$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & \pi\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & \pi\\a & b\end{pmatrix}, \cdots$

On utilise en générale des lettres capitales A, B, M etc. pour désigner des matrices.

Opérations naturelles :

§2. Matrices

Définition. On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Exemples : $(1\ 2)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \pi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \pi \\ a & b \end{pmatrix}$, $\cdots$

On utilise en générale des lettres capitales A, B, M etc. pour désigner des matrices.

Opérations naturelles : addition et soustraction (des matrices de même taille) et multiplication par un scalaire ou leur combinaison :

§2. Matrices

Définition. On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Exemples : $(1\ 2)$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & \pi\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & \pi\\a & b\end{pmatrix}, \cdots$

On utilise en générale des lettres capitales A, B, M etc. pour désigner des matrices.

Opérations naturelles : addition et soustraction (des matrices de même taille) et multiplication par un scalaire ou leur combinaison :

$$\begin{pmatrix}3 & -3\\0 & 4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} =$$

§2. Matrices

Définition. On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Exemples : $(1\ 2)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \pi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \pi \\ a & b \end{pmatrix}$, $\cdots$

On utilise en générale des lettres capitales A, B, M etc. pour désigner des matrices.

Opérations naturelles : addition et soustraction (des matrices de même taille) et multiplication par un scalaire ou leur combinaison :

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + sa & -3 + sb \\ sc - 2 & 6 + sd \end{pmatrix}.$$

§2. Matrices

Définition. On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Exemples : $(1\ 2)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \pi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \pi \\ a & b \end{pmatrix}$, $\cdots$

On utilise en générale des lettres capitales A, B, M etc. pour désigner des matrices.

Opérations naturelles : addition et soustraction (des matrices de même taille) et multiplication par un scalaire ou leur combinaison :

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+sa & -3+sb \\ sc-2 & 6+sd \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on peut **factoriser** :

§2. Matrices

Définition. On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Exemples : $(1\ 2)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \pi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \pi \\ a & b \end{pmatrix}$, $\cdots$

On utilise en générale des lettres capitales A, B, M etc. pour désigner des matrices.

Opérations naturelles : addition et soustraction (des matrices de même taille) et multiplication par un scalaire ou leur combinaison :

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + sa & -3 + sb \\ sc - 2 & 6 + sd \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on peut **factoriser** :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

§2. Matrices

Définition. On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Exemples : $(1\ 2)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \pi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \pi \\ a & b \end{pmatrix}$, $\cdots$

On utilise en générale des lettres capitales A, B, M etc. pour désigner des matrices.

Opérations naturelles : addition et soustraction (des matrices de même taille) et multiplication par un scalaire ou leur combinaison :

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+sa & -3+sb \\ sc-2 & 6+sd \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on peut **factoriser** :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{4}{15} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

§2. Matrices

Définition. On appelle matrice réelle de taille $m \times n$ un tableau de m lignes et n colonnes de nombres réels. On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Exemples : $(1\ 2)$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & \pi\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & \pi\\a & b\end{pmatrix}$, $\cdots$

On utilise en générale des lettres capitales A, B, M etc. pour désigner des matrices.

Opérations naturelles : addition et soustraction (des matrices de même taille) et multiplication par un scalaire ou leur combinaison :

$$\begin{pmatrix}3 & -3\\0 & 4\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+sa & -3+sb\\sc-2 & 6+sd\end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on peut **factoriser** :

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{15} & \frac{2}{15}\\\frac{4}{15} & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}-14 & 2\\4 & 15\end{pmatrix}$$

Ecriture indicielle d'une matrice

Comment indexer chaque entrée (position) dans une matrice ?

Facile pour un vecteur $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$: $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Comme faire pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_? & a_? \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Ecriture indicielle d'une matrice

Comment indexer chaque entrée (position) dans une matrice ?

Facile pour un vecteur $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$: $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Comme faire pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_? & a_? \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \overset{\text{double indice}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ ?? & ?? \end{pmatrix}$$

a_{ij} = l'entrée sur la i-ème ligne et la j-ième colonne.

Exo. 1. Déterminer le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ en dimension 3 tel que $v_i = i + 1$, $i = 1, 2, 3$ ainsi que la matrice A de taille 3x3 telle que $a_{23} = 1$ et

les autres $a_{ij} = 0$.

Ecriture indicielle d'une matrice

Comment indexer chaque entrée (position) dans une matrice ?

Facile pour un vecteur $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$: $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Comme faire pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_? & a_? \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \overset{\text{double indice}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ ?? & ?? \end{pmatrix}$$

a_{ij} = l'entrée sur la i-ème ligne et la j-ième colonne.

Exo. 1. Déterminer le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ en dimension 3 tel que $v_i = i + 1$, $i = 1, 2, 3$ ainsi que la matrice A de taille 3x3 telle que $a_{23} = 1$ et les autres $a_{ij} = 0$.

Solution : $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ecriture indicielle d'une matrice

Comment indexer chaque entrée (position) dans une matrice ?

Facile pour un vecteur $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$: $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

Comme faire pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_? & a_? \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \overset{\text{double indice}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ ?? & ?? \end{pmatrix}$$

a_{ij} = l'entrée sur la i-ème ligne et la j-ième colonne.

Exo. 1. Déterminer le vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ en dimension 3 tel que $v_i = i + 1$, $i = 1, 2, 3$ ainsi que la matrice A de taille 3x3 telle que $a_{23} = 1$ et les autres $a_{ij} = 0$. Solution : $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Expliciter $(d_{ij})_{2,2}$ avec $d_{ij} = i + j$ (à faire à la maison).

Matrices spéciales

La **matrice d'identité** de taille n est toujours notée par la lettre I, Id ou bien I_n , Id_n :

$$I_1 = (1), I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_4 =$$

Matrices spéciales

La **matrice d'identité** de taille n est toujours notée par la lettre I, Id ou bien I_n , Id_n :

$$I_1 = (1), I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_4 =$$

On peut aussi représenter une matrice comme une liste de vecteurs colonnes $A = \left(\vec{\mathbf{u}}\,\vec{\mathbf{v}}\,\vec{\mathbf{e_3}}\right)$ avec $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\mathbf{e_2}}$.

$$A =$$

Matrices spéciales

La **matrice d'identité** de taille n est toujours notée par la lettre I, Id ou bien I_n , Id_n :

$$I_1 = (1), I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_4 =$$

On peut aussi représenter une matrice comme une liste de vecteurs colonnes $A = \left(\vec{\mathbf{u}}\,\vec{\mathbf{v}}\,\vec{\mathbf{e_3}}\right)$ avec $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\mathbf{e_2}}$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices spéciales

La **matrice d'identité** de taille n est toujours notée par la lettre I, Id ou bien I_n , Id_n :

$$I_1 = (1), I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_4 =$$

On peut aussi représenter une matrice comme une liste de vecteurs colonnes $A = \left(\vec{\mathbf{u}}\,\vec{\mathbf{v}}\,\vec{\mathbf{e_3}}\right)$ avec $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\mathbf{e_2}}$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les vecteurs colonnes de Id_n ?

§3 Multiplication de deux matrices AB

Attention. L'ordre est important ! NE PAS confondre avec BA.

§3 Multiplication de deux matrices AB

Attention. L'ordre est important ! NE PAS confondre avec BA.

Pour pouvoir effectuer AB, il faut

la longueur d'une ligne de A = la longueur d'une colonne de B

§3 Multiplication de deux matrices AB

Attention. L'ordre est important ! NE PAS confondre avec BA.

Pour pouvoir effectuer AB, il faut

$$\boxed{\textbf{la longueur d'une ligne de } A = \textbf{la longueur d'une colonne de } B}$$

On pose A et B de telle façon : $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & \end{array}$, puis on calcule $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & AB \end{array}$

en suivant l'exemple : $\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = AB \end{array}$,

§3 Multiplication de deux matrices AB

Attention. L'ordre est important ! NE PAS confondre avec BA.

Pour pouvoir effectuer AB, il faut

$$\boxed{\textbf{la longueur d'une ligne de } A = \textbf{la longueur d'une colonne de } B}$$

On pose A et B de telle façon : $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & \end{array}$, puis on calcule $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & AB \end{array}$

en suivant l'exemple : $\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = AB \end{array}$,

où $* = 4 \times 3 + 2 \times 1 = 14$.

§3 Multiplication de deux matrices AB

Attention. L'ordre est important ! NE PAS confondre avec BA.

Pour pouvoir effectuer AB, il faut

$$\boxed{\textbf{la longueur d'une ligne de } A = \textbf{la longueur d'une colonne de } B}$$

On pose A et B de telle façon : $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & \end{array}$, puis on calcule $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & AB \end{array}$

en suivant l'exemple : $\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = AB \end{array}$,

où $* = 4 \times 3 + 2 \times 1 = 14$.
C'est comme le calcul de la note finale de deux matières avec $(4 \;\; 2)$ comme coefficients (c'est aussi le produit scalaire de deux vecteurs).

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}* & *\\ * & *\\ * & *\end{pmatrix}\end{array}, \quad \text{où } * = 4 \times 3 + 2 \times 1 = 14.$$

Calculer toutes les cases de AB de la même manière en commençant par $*$:

$$\begin{array}{r|l} & \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}14 & *\\ * & *\\ * & *\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}* & *\\ * & *\\ * & *\end{pmatrix}\end{array}, \quad \text{où } * = 4\times 3 + 2\times 1 = 14.$$

Calculer toutes les cases de AB de la même manière en commençant par $*$:

$$\begin{array}{r|l} & \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} = B\\ \hline A = \begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}14 & *\\ * & *\\ * & *\end{pmatrix}\end{array}$$

Donc $\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 6\\ -6 & -4\\ -2 & -3\end{pmatrix}.$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \end{array}, \quad \text{où } * = 4 \times 3 + 2 \times 1 = 14.$$

Calculer toutes les cases de AB de la même manière en commençant par $*$:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B \\ \hline A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 14 & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ -6 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Remarque. La première colonne de AB ne concerne que A entière et la première colonne de B :

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ (c'est la première colonne de AB).

Exercices

1. La première colonne de AB ne concerne que A entière et la première colonne de B. La première ligne de AB ne concerne que ? ? et ? ? .
2. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} =$
3. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} =$
5. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$
6. Réécrire le système $\left\{ \begin{array}{l} 7x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{array} \right.$ sous forme de produit matriciel.

Exercices

1. La première colonne de AB ne concerne que A entière et la première colonne de B. La première ligne de AB ne concerne que la première ligne de A et B entière.
2. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$
3. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ n'est PAS définie. Les tailles sont incompatibles !
4. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} =$
5. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$
6. Réécrire le système $\left\{ \begin{array}{l} 7x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{array} \right.$ sous forme de produit matriciel.

Exercices

1. La première colonne de AB ne concerne que A entière et la première colonne de B. La première ligne de AB ne concerne que la première ligne de A et B entière.
2. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$
3. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ n'est PAS définie. Les tailles sont incompatibles !
4. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' \\ ba' & bb' \end{pmatrix}$ (bizarre ... ?)
5. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$
6. Réécrire le système $\left\{ \begin{array}{l} 7x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{array} \right.$ sous forme de produit matriciel.

Exercices

1. La première colonne de AB ne concerne que A entière et la première colonne de B. La première ligne de AB ne concerne que la première ligne de A et B entière.
2. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$
3. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ n'est PAS définie. Les tailles sont incompatibles !
4. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' \\ ba' & bb' \end{pmatrix}$ (bizarre ... ?)
5. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$
6. Réécrire le système $\begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ sous forme de produit matriciel.

Exercices

1. La première colonne de AB ne concerne que A entière et la première colonne de B. La première ligne de AB ne concerne que la première ligne de A et B entière.
2. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$
3. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ n'est PAS définie. Les tailles sont incompatibles !
4. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' \\ ba' & bb' \end{pmatrix}$ (bizarre ... ?)
5. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$
6. Réécrire le système $\begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ sous forme de produit matriciel. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercices

1. La première colonne de AB ne concerne que A entière et la première colonne de B. La première ligne de AB ne concerne que la première ligne de A et B entière.
2. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$
3. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ n'est PAS définie. Les tailles sont incompatibles !
4. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' \\ ba' & bb' \end{pmatrix}$ (bizarre ... ?)
5. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$
6. Réécrire le système $\begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ sous forme de produit matriciel. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

C'est l'une des raisons de multiplier deux matrices de telle façon !.

Définition formelle

Rappel. Pour une matrice quelconque A, on utilise une double indice a_{ij} indiquant la valeur de A dans la i-ème ligne et j-ème colonne.

Définition

*Etant données deux matrices A de taille $m \times n$ et B de taille $n \times p$ (**NB : le même nombre** n) on définit le produit des deux matrices $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, par*

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk}$$

Définition formelle

Rappel. Pour une matrice quelconque A, on utilise une double indice a_{ij} indiquant la valeur de A dans la i-ème ligne et j-ème colonne.

Définition

*Etant données deux matrices A de taille $m \times n$ et B de taille $n \times p$ (***NB : le même nombre** *n) on définit le produit des deux matrices $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, par*

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} = A_{i1} B_{1k} + A_{i2} B_{2k} + A_{i3} B_{3k} + \cdots + A_{in} B_{nk}.$$

Définition formelle

Rappel. Pour une matrice quelconque A, on utilise une double indice a_{ij} indiquant la valeur de A dans la i-ème ligne et j-ème colonne.

Définition

*Etant données deux matrices A de taille $m \times n$ et B de taille $n \times p$ (**NB : le même nombre** n) on définit le produit des deux matrices $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, par*

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} = A_{i1} B_{1k} + A_{i2} B_{2k} + A_{i3} B_{3k} + \cdots + A_{in} B_{nk}.$$

l'élément ik est formé à partir de la i-ème ligne de A :

$\begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \end{pmatrix}$ et la k-ème colonne de B : $\begin{pmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ \vdots \\ B_{nk} \end{pmatrix}$ par un produit scalaire.

Retrouver une ligne ou colonne

On peut récupérer la j-ème colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par $A\vec{\mathbf{e_j}}$ où $\vec{\mathbf{e_j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, avec 1 à la j-ème ligne et 0 ailleurs. Le n-tuple de vecteurs, $(\vec{\mathbf{e_1}}, \dots, \vec{\mathbf{e_n}})$ s'appelle la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Retrouver une ligne ou colonne

On peut récupérer la j-ème colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par $A\vec{\mathbf{e_j}}$ où $\vec{\mathbf{e_j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, avec 1 à la j-ème ligne et 0 ailleurs. Le n-tuple de vecteurs, $(\vec{\mathbf{e_1}}, \dots, \vec{\mathbf{e_n}})$ s'appelle la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Question : Comment récupérer la i-ème line d'une matrice ?

Retrouver une ligne ou colonne

On peut récupérer la j-ème colonne d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par $A\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}$ où $\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, avec 1 à la j-ème ligne et 0 ailleurs. Le n-tuple de vecteurs, $(\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}})$ s'appelle la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Question : Comment récupérer la i-ème line d'une matrice ?
réponse : la multiplier à gauche par un vecteur spécial !

§4. Quelques lois

Théorème. Soient A, B, C trois matrices.

§4. Quelques lois

Théorème. Soient A, B, C trois matrices.

1. Multiplier avec la matrice identité ne change rien :

$$\boxed{Id \cdot A = A \quad \text{et} \quad B \cdot Id = B}$$

§4. Quelques lois

Théorème. Soient A, B, C trois matrices.
1. Multiplier avec la matrice identité ne change rien :

$$\boxed{Id \cdot A = A \quad \text{et} \quad B \cdot Id = B}$$

2. Si les produits AB et BC sont définis, alors on peut effectuer les produits $(AB)C$ et $A(BC)$, de plus :

$$\boxed{\mathrm{(AB)C = A\ (BC)}}$$

On écrit simplement ABC pour ce produit (c'est la lois associative).

§4. Quelques lois

Théorème. Soient A, B, C trois matrices.
1. Multiplier avec la matrice identité ne change rien :

$$\boxed{Id \cdot A = A \quad \text{et} \quad B \cdot Id = B}$$

2. Si les produits AB et BC sont définis, alors on peut effectuer les produits $(AB)C$ et $A(BC)$, de plus :

$$\boxed{\text{(AB)C} = \text{A (BC)}}$$

On écrit simplement ABC pour ce produit (c'est la lois associative).
3. Si B et C ont la même taille, et AB est défini, on peut factoriser

$$\boxed{\text{AB+AC=A(B+C)}, \qquad \text{A(B+kC)= AB + kAC}}$$

(c'est la lois distributive).

§4. Quelques lois

Théorème. Soient A, B, C trois matrices.

1. Multiplier avec la matrice identité ne change rien :

$$\boxed{Id \cdot A = A \quad \text{et} \quad B \cdot Id = B}$$

2. Si les produits AB et BC sont définis, alors on peut effectuer les produits $(AB)C$ et $A(BC)$, de plus :

$$\boxed{(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}\ (\mathrm{BC})}$$

On écrit simplement ABC pour ce produit (c'est la lois associative).

3. Si B et C ont la même taille, et AB est défini, on peut factoriser

$$\boxed{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}), \qquad \mathrm{A}(\mathrm{B}+k\mathrm{C})= \mathrm{AB} + k\mathrm{AC}}$$

(c'est la lois distributive).

4. $AC + BC = (A + B)C$ (sous quelle condition ?)

§4. Quelques lois

Théorème. Soient A, B, C trois matrices.

1. Multiplier avec la matrice identité ne change rien :

$$\boxed{Id \cdot A = A \quad \text{et} \quad B \cdot Id = B}$$

2. Si les produits AB et BC sont définis, alors on peut effectuer les produits $(AB)C$ et $A(BC)$, de plus :

$$\boxed{\text{(AB)C} = \text{A (BC)}}$$

On écrit simplement ABC pour ce produit (c'est la lois associative).

3. Si B et C ont la même taille, et AB est défini, on peut factoriser

$$\boxed{\text{AB+AC=A(B+C)}, \qquad \text{A(B+kC)= AB + kAC}}$$

(c'est la lois distributive).

4. $AC + BC = (A + B)C$ (sous quelle condition ?)

Question piège : Est-ce qu'on peut factoriser $AB + BC$?

Exemples. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemples. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Question. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{matrice identité} \\ \text{de quelle taille ?} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

Preuve de $(AB)C = A(BC)$

Prenons $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

$$((AB)C)_{il} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} C_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \right) C_{kl} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{ij} B_{jk} C_{kl} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} B_{jk} C_{kl} \right) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} (BC)_{jl} = (A(BC))_{il}.$$

(commutativité de l'addition des nombres réels).

Preuve de $(AB)C = A(BC)$

Prenons $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

$$((AB)C)_{il} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} C_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \right) C_{kl} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{ij} B_{jk} C_{kl} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} B_{jk} C_{kl} \right) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} (BC)_{jl} = (A(BC))_{il}.$$

(commutativité de l'addition des nombres réels).

Ex. 1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

Ex. 2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 = 9$. Il serait 'stupide' de calculer ce produit différemment.

§5 Matrice inverse

Définition. Une matrice A est dite **carrée** si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. La diagonale d'une telle matrice part d'en haut à gauche vers en bas à droite.

§5 Matrice inverse

Définition. Une matrice A est dite **carrée** si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. La diagonale d'une telle matrice part d'en haut à gauche vers en bas à droite.

Soit A une matrice carrée de taille n. Si une matrice B de même taille vérifie $\boxed{BA = Id_n}$, on dit que B est la matrice inverse de A, et on note B par A^{-1}.

§5 Matrice inverse

Définition. Une matrice A est dite **carrée** si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. La diagonale d'une telle matrice part d'en haut à gauche vers en bas à droite.

Soit A une matrice carrée de taille n. Si une matrice B de même taille vérifie $\boxed{BA = Id_n}$, on dit que B est la matrice inverse de A, et on note B par A^{-1}.

Ex. : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

§5 Matrice inverse

Définition. Une matrice A est dite **carrée** si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. La diagonale d'une telle matrice part d'en haut à gauche vers en bas à droite.

Soit A une matrice carrée de taille n. Si une matrice B de même taille vérifie $\boxed{BA = Id_n}$, on dit que B est la matrice inverse de A, et on note B par A^{-1}.

Ex. : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Attention. Il y a des matrices A n'admettant pas de matrice d'inverse !

§5 Matrice inverse

Définition. Une matrice A est dite **carrée** si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. La diagonale d'une telle matrice part d'en haut à gauche vers en bas à droite.

Soit A une matrice carrée de taille n. Si une matrice B de même taille vérifie $\boxed{BA = Id_n}$, on dit que B est la matrice inverse de A, et on note B par A^{-1}.

Ex. : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Attention. Il y a des matrices A n'admettant pas de matrice d'inverse !

Questions : A quoi ça sert ? Comment la trouver (si elle existe) ?

§5 Matrice inverse

Définition. Une matrice A est dite **carrée** si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. La diagonale d'une telle matrice part d'en haut à gauche vers en bas à droite.

Soit A une matrice carrée de taille n. Si une matrice B de même taille vérifie $\boxed{BA = Id_n}$, on dit que B est la matrice inverse de A, et on note B par A^{-1}.

Ex. : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Attention. Il y a des matrices A n'admettant pas de matrice d'inverse !

Questions : A quoi ça sert ? Comment la trouver (si elle existe) ?

A quoi ça sert ? Ça sert à annuler l'effet d'avoir été multiplié par A : si on connait AX sans pour autant connaître X, on peut retrouver X à l'aide de A^{-1} :

§5 Matrice inverse

Définition. Une matrice A est dite **carrée** si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. La diagonale d'une telle matrice part d'en haut à gauche vers en bas à droite.

Soit A une matrice carrée de taille n. Si une matrice B de même taille vérifie $\boxed{BA = Id_n}$, on dit que B est la matrice inverse de A, et on note B par A^{-1}.

Ex. : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Attention. Il y a des matrices A n'admettant pas de matrice d'inverse !

Questions : A quoi ça sert ? Comment la trouver (si elle existe) ?

A quoi ça sert ? Ça sert à annuler l'effet d'avoir été multiplié par A : si on connait AX sans pour autant connaître X, on peut retrouver X à l'aide de A^{-1} : $X =$

§5 Matrice inverse

Définition. Une matrice A est dite **carrée** si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. La diagonale d'une telle matrice part d'en haut à gauche vers en bas à droite.

Soit A une matrice carrée de taille n. Si une matrice B de même taille vérifie $\boxed{BA = Id_n}$, on dit que B est la matrice inverse de A, et on note B par A^{-1}.

Ex. : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Attention. Il y a des matrices A n'admettant pas de matrice d'inverse !

Questions : A quoi ça sert ? Comment la trouver (si elle existe) ?

A quoi ça sert ? Ça sert à annuler l'effet d'avoir été multiplié par A : si on connait AX sans pour autant connaître X, on peut retrouver X à l'aide de A^{-1} : $X = Id \cdot X =$

§5 Matrice inverse

Définition. Une matrice A est dite **carrée** si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. La diagonale d'une telle matrice part d'en haut à gauche vers en bas à droite.

Soit A une matrice carrée de taille n. Si une matrice B de même taille vérifie $\boxed{BA = Id_n}$, on dit que B est la matrice inverse de A, et on note B par A^{-1}.

Ex. : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Attention. Il y a des matrices A n'admettant pas de matrice d'inverse !

Questions : A quoi ça sert ? Comment la trouver (si elle existe) ?

A quoi ça sert ? Ça sert à annuler l'effet d'avoir été multiplié par A : si on connait AX sans pour autant connaître X, on peut retrouver X à l'aide de A^{-1} : $X = Id \cdot X = (A^{-1}A)X =$

§5 Matrice inverse

Définition. Une matrice A est dite **carrée** si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. La diagonale d'une telle matrice part d'en haut à gauche vers en bas à droite.

Soit A une matrice carrée de taille n. Si une matrice B de même taille vérifie $\boxed{BA = Id_n}$, on dit que B est la matrice inverse de A, et on note B par A^{-1}.

Ex. : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, donc $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Attention. Il y a des matrices A n'admettant pas de matrice d'inverse !

Questions : A quoi ça sert ? Comment la trouver (si elle existe) ?

A quoi ça sert ? Ça sert à annuler l'effet d'avoir été multiplié par A : si on connait AX sans pour autant connaître X, on peut retrouver X à l'aide de A^{-1} : $X = Id \cdot X = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX)$.

Exemple : Sachant $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, quel est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

On suit la recette : $X = Id \cdot X = (A^{-1}A)X$

Exemple : Sachant $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, quel est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

On suit la recette :

$$\begin{array}{ccccc} X & = & Id \cdot X & = & (A^{-1}A)X \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & (\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple : Sachant $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, quel est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

On suit la recette :

$$\begin{array}{ccccc} X & = & Id \cdot X & = & (A^{-1}A)X \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & (\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \quad A^{-1}(AX)$$

Exemple : Sachant $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, quel est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

On suit la recette :

$$\begin{array}{ccccc} X & = & Id \cdot X & = & (A^{-1}A)X \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & (\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} = & A^{-1}(AX) \\ = & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \end{array}$$

Exemple : Sachant $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, quel est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

On suit la recette :

$$\begin{array}{ccccc} X & = & Id \cdot X & = & (A^{-1}A)X \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & (\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \quad A^{-1}(AX)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exemple : Sachant $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, quel est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

On suit la recette :

$$\begin{array}{ccccc} X & = & Id \cdot X & = & (A^{-1}A)X \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & (\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} = & A^{-1}(AX) & \\ = & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) & = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Une autre façon de poser la question, résoudre (avec x, y comme inconnues) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exemple : Sachant $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, quel est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

On suit la recette :

$$\begin{array}{ccccc} X & = & Id \cdot X & = & (A^{-1}A)X \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & (\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \quad A^{-1}(AX)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Une autre façon de poser la question, résoudre (avec x, y comme inconnues) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ou encore : résoudre le système

$$\begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}.$$

Exemple : Sachant $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, quel est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

On suit la recette :

$$\begin{array}{ccccc} X & = & Id \cdot X & = & (A^{-1}A)X \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & (\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} = & A^{-1}(AX) \\ = & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Une autre façon de poser la question, résoudre (avec x, y comme inconnues) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ou encore : résoudre le système $\begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$. Solution : $x = -1$ et $y = 5$.

Exemple : Sachant $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, quel est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

On suit la recette :

$$\begin{array}{ccccc} X & = & Id \cdot X & = & (A^{-1}A)X \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \quad A^{-1}(AX)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Une autre façon de poser la question, résoudre (avec x, y comme inconnues) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ou encore : résoudre le système

$\begin{cases} 7x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$. Solution : $x = -1$ et $y = 5$.

Donc ça sert à résoudre les systèmes (entre autres).

Comment trouver l'inverse d'une matrice ?

Méthode 'brutale' : on considère les coefficients comme des inconnus et on essaye de résoudre le problème : $?A = I$.

Exemple. Soit. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comment trouver l'inverse d'une matrice ?

Méthode 'brutale' : on considère les coefficients comme des inconnus et on essaye de résoudre le problème : $?A = I$.

Exemple. Soit. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Réponse ?

Comment trouver l'inverse d'une matrice ?

Méthode 'brutale' : on considère les coefficients comme des inconnus et on essaye de résoudre le problème : $?A = I$.

Exemple. Soit. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Réponse ?

Plus tard nous allons apprendre :

– des tests simples sur la possibilité ou non d'inverser une matrice donnée.

– des méthodes systématiques de calculer cette matrice inverse lorsqu'elle existe.

– résoudre des systèmes $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{c}}$: si A admet une matrice inverse B, alors la solution du système est $B\vec{\mathbf{c}}$.

– tirer des info lorsque A n'est pas inversible.

§6. Matrices particulières et d'autres opérations matricielles

Définition

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *on définit sa matrice* **transposée** ${}^{\mathbf{t}}A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *qui échange les lignes et les colonnes :* $({}^{\mathbf{t}}A)_{ji} = A_{ij}$.

Ex. 1. ${}^{\mathbf{t}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Ex. 2. $\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a

$$\text{produit scalaire } \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = {}^{\mathbf{t}}\vec{\mathbf{a}}\, \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \times (-1) + 4 \times 2 = 1.$$

Questions : Lorsqu'on combine la transposée avec $+, k.$ **et la multiplication** AB**, qu'obtient-on ?**

Théorème

$(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$. Si $BA = I$ alors $AB = I$.

Preuve : Pour que $C^{-1}A^{-1}$ soit la matrice inverse de AC, il faut les multiplier :

$$C^{-1}A^{-1}(AC) = C^{-1}(A^{-1}A)C = C^{-1}IC = C^{-1}C = I \ .$$

Pour le deuxième, $BA = I \Longrightarrow$ pour tout $\vec{\mathbf{v}}$, le système $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{v}}$ admet comme solution $\vec{\mathbf{x}} = B\vec{\mathbf{v}}$. Du coup

$$(AB)\vec{\mathbf{v}} = A(B\vec{\mathbf{v}}) = A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{v}}$$

pour tout $\vec{\mathbf{v}}$. En particulier $(AB)\vec{\mathbf{e}}_j = \vec{\mathbf{e}}_j$ pour tout $\vec{\mathbf{e}}_j$ de la base standard. Or $(AB)\vec{\mathbf{e}}_j$ est la j-ième colonne de AB. Cette colonne est donc $\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{j}}$. Ainsi $AB = I$.

Questions pièges : Comment procéder lorsqu'on combine l'inversion avec la transposition, la multiplication avec un scalaire, et l'addition ?

Définition

Une matrice carrée est dite

- **symétrique** si ${}^{\mathbf{t}}A = A$, ou encore $A_{ij} = A_{ji}$
- **anti-symétrique** si ${}^{\mathbf{t}}A = -A$, $A_{ij} = -A_{ji}$
- **diagonale** si $A_{ij} = 0$ pour $i \neq j$
- **triangulaire supérieure (inférieure)** si $A_{ij} = 0$ pour $i > j$ ($i < j$ respectivement).

Exemples

1. une matrice symétrique : la table des multiplication, la table des kilométrages entre des pairs de villes.
2. un exemple antisymétrique : la table des différence, ou prêt-emprunts.
3. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ correspond à l'opération "chapeau" $\widehat{(x; y)} = (-y; x)$ qui effectue une rotation de $\pi/2 = 90^o$ dans le sens direct dans le plan.