Cours de mathématiques
ECT 2ème année

Chapitre 5
Matrices inversibles

Adrien Fontaine
Année scolaire 2018–2019

Dans tout ce chapitre, on ne considérera que des matrices carrées.

1. Matrices inversibles

Définition 1 :

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dîte **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

Si B existe, elle est appelée inverse de A et notée A^{-1}.

Remarque :

- La notion de matrice inversible n'a de sens que pour des matrices carrées.
- Une matrice inversible admet un unique inverse :
  On suppose qu'il existe deux matrices B_1 et B_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB_1 = B_1A = I_n$ et $AB_2 = B_2A = I_n$. Alors, en particulier, $(B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$ et $(B_1A)B_2 = B_1(AB_2) = B_1I_n = B_1$, et donc $B_1 = B_2$.

Exemple :

1. La matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$ car :

$$I_nI_n = I_n \qquad \text{et } I_nI_n = I_n$$

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

3. La matrice carrée nulle O_n n'est pas inversible car :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad O_n \times M = M \times O_n = O_n \neq I - n$$

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle mais elle n'est pas inversible pour autant : quelle que soit la matrice par laquelle on la multiplie à droite, la première ligne du résultat sera constitué de trois zéros et donc la matrice produit ne peut pas être égale à I_3.

Théorème 1 :

Si P et Q sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $PQ = I_n$, alors P et Q sont inversibles, et on a :

$$P^{-1} = Q \quad \text{et} \quad Q^{-1} = P$$

Exemple :

- Considérons les matrices $P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Alors :

$$PQ = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ce qui prouve que P et Q sont inversibles et qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

- Considérons les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$. Alors :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Ce qui prouve que P et Q sont inversibles et qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

Corollaire 1 :

Si P et Q sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $PQ = \lambda I_n$ avec $\lambda \neq 0$, alors P et Q sont inversibles, et on a :

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda} Q \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{\lambda} P$$

Exemple : Considérons les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10 I_3$$

Ce qui prouve que P et Q sont inversibles et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

.

Remarquons que le cas des matrices diagonales est facile :

Proposition 1 :

Une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux d_i sont tous non nuls. Dans ce cas :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Proposition 2 :

Soit A une matrice triangulaire supérieure ou inférieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si ses termes diagonaux sont tous non nuls.

Exemple :

- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ est inversible car 2, 1 et -4 sont non nuls.
- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car le deuxième coefficient diagonale est nul.

Proposition 3 :

Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB est inversibles et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A est inversibles, alors A est simplifiable à gauche et à droite, c'est-à-dire :

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

$$BA = CA \Rightarrow B = C$$

Terminons avec le cas des matrices carrées de taille 2.

Proposition 4 :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Preuve. On commence par observer que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

Ce qui prouve que si $ad - bc \neq 0$ alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Si par ailleurs, $ad - bc = 0$, alors en posant $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, on a $AB = O_2$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que A soit inversible. Alors, on aurait $B = A^{-1}AB = A^{-1}O_2 = O_2$

, ce qui donnerait $a=b=c=d=0$ et donc $A=O_2$. Or, la matrice nulle d'ordre 2 n'est pas inversible. Contradiction. Donc, A n'est pas inversible. □

Exemple : Les matrices suivantes sont-elles inversibles? SI oui préciser leur inverse.

1. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. On a $1\times 4-2\times 3=-2\neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.
2. $B=\begin{pmatrix}3&6\\2&4\end{pmatrix}$. $3\times 4-2\times 6=0$ donc B n'est pas inversible.

2. Calcul effectif de l'inverse d'une matrice

2.1. Calcul de l'inverse par la résolution d'un système

Théorème 2 :

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si pour tout $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX=Y$ admet une unique solution.

Méthode 1 : Montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on résout le système $AX=Y$ d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en fonction de $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconque fixé, puis on discute :

- Si le système admet une unique solution $X=BY$ aalors A est inversible et $A^{-1}=B$.
- Sinon, la matrice n'est pas inversible.

Exemple : Montrons que la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-7&11\\-1&12&-19\\0&-3&5\end{pmatrix}$ est inversible et déterminons son inverse.

Soit $Y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a les équivalences :

$$AX=Y\iff\begin{pmatrix}1&-7&11\\-1&12&-19\\0&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&-&7y&+&11z&=&a\\ -x&+&12y&-&19z&=&b\\ &-&3y&+&5z&=&c\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&-&7y&+&11z&=&a\\ &&5y&-&8z&=&a+b\\ &-&3y&+&5z&=&c\end{array}\right.\qquad L_2\leftarrow L_2+L_1$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&-&7y&+&11z&=&a\\ &&15y&-&24z&=&3a+3b\\ &-&15y&+&25z&=&5c\end{array}\right.\qquad \begin{array}{l}L_2\leftarrow 3L_2\\ L_3\leftarrow 5L_3\end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & 7y & + & 11z & = & a & & & & \\ & & 15y & - & 24z & = & 3a & + & 3b & & \\ & & & & z & = & 3a & + & 3b & + & 5c \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & 7y & + & 11z & = & a & & & & \\ & & 15y & & & = & 75a & + & 75b & + & 120c \\ & & & & z & = & 3a & + & 3b & + & 5c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & 7y & + & 11z & = & a & & & & \\ & & y & & & = & 5a & + & 5b & + & 8c \\ & & & & z & = & 3a & + & 3b & + & 5c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 3a & + & 2b & + & c \\ y & = & 5a & + & 5b & + & 8c \\ z & = & 3a & + & 3b & + & 5c \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice A est inversible et son inverse est donné par $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2.2. Calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss

Théorème 3 :

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A transforme la matrice A en une matrice B inversible.
Dès lors, en transformant la matrice A en la matrice identité à l'aide d'opérations sur les lignes et en effectuant simultanément les mêmes opérations sur la matrice identité, on obtient l'inverse de la matrice A.

Méthode 2 : Méthode de Gauss-Jordan

En pratique, pour transformer A en I_n, on commence par transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure par la méthode du pivot de Gauss, ce qui permet déjà de savoir si A est inversible ou non. Le cas échéant, on transforme alors la matrice triangulaire obtenue en la matrice identité. C'est la méthode de Gauss-Jordan.

Exemple : On considère la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
On utilise donc la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice obtenue est triangulaire supérieure avec tous ses pivots non nuls donc elle est inversible. Par théorème, la matrice P est elle aussi inversible. Poursuivons la méthode :

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc, la matrice P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Exercices

5.1 On note $I = I_3$ et on donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. **a.** Calculer A^2, puis A^3.
   b. En déduire que A n'est pas inversible.
2. **a.** Calculer $(I-A)(I+A+A^2)$.
   b. En déduire que $I - A$ est inversible et donner son inverse.
3. Montrer également que $I + A$ est inversible et donner son inverse.

5.2

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer A^2.
   b. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer A^3.
   b. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.
3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer $-A^3 - 3A^2 - 3A$.
   b. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.
4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer $A^3 - A$.
   b. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

5.3 On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

5.4 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2. Calculer B^3. La matrice B est-elle inversible ?

5.5 On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En résolvant un système, montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

5.6

1. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

2. Résoudre le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 3 \end{array}\right.$$

5.7

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

2. Résoudre les systèmes (S_1) et (S_2) suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{ccccccc} -3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & = & -2 \\ -3x & + & 4y & - & 8z & = & 4 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{ccccccc} -3x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 4y & - & 8z & = & 3 \end{array}\right.$$

5.8 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

6. $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

8. $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

5.9 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par la donnée de $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et les relations de récurrence

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_{n+1} & = & \frac{1}{3}x_n & + & \frac{3}{4}y_n \\ y_{n+1} & = & \frac{2}{3}x_n & + & \frac{1}{4}y_n \end{array}\right.$$

valables pour tout entier naturel n.

On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. **a.** Donner U_0.

   b. Déterminer une matrice A telle que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on ait : $U_{n+1} = AU_n$.

   c. Montrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n = A^nU_0$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible, avec $P^{-1} = \dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$.

3. Soit $D = P^{-1}AP$.

   a. Calculer D, puis pour tout entier $n \geqslant 0$, donner D^n en fonction de n.

   b. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

4. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

   b. En déduire l'expression de A^n.

   c. Déterminer x_n et y_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

5.10 Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A :

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer D^k pour tout entier naturel k.
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$ et que pour tout entier naturel k,

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

4. Déterminer $P^{-1}X_1$ et en déduire par récurrence que pour tout entier naturel k :

$$A^kX_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \end{pmatrix}.$$

Partie B :

On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée (appelée "semaine 1"). Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A, B et C.

On considère en outre que :

- si M a choisi le dessert A la semaine n, alors la semaine $n+1$ il choisit le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$;

- si M a choisi le dessert B la semaine n, alors la semaine $n+1$ il choisit le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$:
- si M a choisi le dessert C la semaine n, il reprend le dessert C la semaine $n+1$;
- le consommateur choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On notera pour tout entier naturel non nul n :

- A_n l'évènement : "M a choisi le dessert A la n-ième semaine " ;
- B_n l'évènement : "M a choisi le dessert B la n-ième semaine " ;
- C_n l'évènement : "M a choisi le dessert C la n-ième semaine " ;

On note aussi :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}.$$

1. Donner $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(C_1)$ ainsi que les probabilités :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}), \quad \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}), \quad \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}), \\ &\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}), \quad \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}), \quad \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}), \\ &\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}), \quad \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}), \quad \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}). \end{aligned}$$

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier avec soin que :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_n).$$

Donner de même des relations exprimant $\mathbb{P}(B_{n+1})$ et $\mathbb{P}(C_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(C_n)$.

3. **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$U_{n+1} = AU_n.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$U_n = A^{n-1}X_1.$$

4. En déduire, en fonction de n, la probabilité $\mathbb{P}(A_n)$ ainsi que sa limite n tend vers $+\infty$.

4. Table des matières