Sommaire

1. Déterminant d'une matrice carrée 1
1.1. Déterminant d'une matrice carrée A . . 1
1.2. Interprétation en dimensions 2 et 3 . . . 2
1.3. Propriétés élémentaires 2
1.4. Déterminant de la transposée 3
1.5. Manipulation de colonnes 3
1.6. Déterminant d'une matrice triangulaire . 3
1.7. Déterminant d'un produit 4
1.8. Déterminant de 2 matrices semblables . 4

2. Calcul de déterminants 4
2.1. En dimension 2 et 3 4
2.2. Dév. selon une ligne ou colonne 5
2.3. Exemples 5

3. Déterminant d'une famille de vecteurs 6
3.1. Déterminant d'une famille de vecteurs . 6
3.2. Interprétation géométrique 7
3.3. Caractérisation des bases 7

4. Déterminant d'un endomorphisme 7
4.1. Déterminant d'un endomorphisme dans une base 7
4.2. Déterminant d'un endomorphisme 7
4.3. Déterminant de la composée 7
4.4. Caractérisation des automorphismes . . 8
4.5. Déterminant de l'endomorphisme réciproque 8

1. Déterminant d'une matrice carrée

1.1. Déterminant d'une matrice carrée A

Théorème : On considère les applications de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, qui, de plus, vérifient les propriétés suivantes :

- elles sont linéaires par rapport à chaque colonne ;
- qui sont multipliées par -1 quand on inverse deux colonnes ;
- et telles que la matrice I_n a pour image 1.

Il existe une et une seule application vérifiant ces trois conditions.

Définition : Cette application est appelée le déterminant de la matrice, on note det(A) ce déterminant.
Quand on écrit le déterminant avec une matrice explicite, on le note comme une matrice, mais avec des barres verticales au lieu de parenthèses, par exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

Démonstration : On admet l'existence et l'unicité du déterminant d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On va simplement faire le calcul en dimension 2.

Par linéarité par rapport à la première colonne, on a : $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{vmatrix}$.

Par linéarité par rapport à la deuxième colonne, on obtient maintenant :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a\left(c\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) + b\left(c\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right).$$

On remarque que : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, en inversant les deux colonnes, c'est donc nul !

On a aussi : $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, en inversant les deux colonnes, c'est donc aussi nul !

Par définition : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Enfin : $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$.

Finalement : $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Cette démonstration n'est valable qu'en dimension 2, même si son principe est valable dans toutes les dimensions... ■

1.2. Interprétation en dimensions 2 et 3

On a bien vu en dimension 2 qu'on retrouvait, avec les propriétés demandées, le calcul classique du déterminant.
Le même calcul, trois fois plus long, nous donnerait le déterminant connu en dimension 3 également.
On rappelle l'interprétation géométrique de ces déterminants lorsque les colonnes sont les coordonnées de 2, ou 3, vecteurs dans une base orthonormale directe.
On appelle ces vecteurs $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ en dimension 2, et, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ en dimension 3.

- En dimension 2, le déterminant est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Cette aire est positive si $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est direct, négative si c'est indirect.
- En dimension 3, le déterminant est le volume algébrique du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Ce volume est positif si $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est direct, négatif si c'est indirect.

1.3. Propriétés élémentaires

Théorème : Le déterminant d'une matrice qui a une colonne nulle est nul.

Démonstration : cette colonne est égale à 0 fois cette colonne, par linéarité le déterminant est donc nul. ■

Théorème : Le déterminant d'une matrice qui a deux colonnes égales est nul.

Démonstration : En échangeant les deux colonnes égales de A :
- on ne change pas le déterminant, puisque c'est deux fois le même ;
- mais on le multiplie par -1, en appliquant une des propriétés caractéristiques.

On a donc : $\det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$. ■

Théorème : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Démonstration : On fait simplement jouer n fois la linéarité, successivement par rapport à chaque colonne. ■

Théorème : Soit D une matrice diagonale, alors, le déterminant de D est le produit des éléments de la diagonale.

Démonstration : On fait encore simplement jouer n fois la linéarité, successivement par rapport à chaque colonne.
On obtient le produit des éléments de la diagonale et du déterminant de I_n.
Ce dernier valant 1 par propriété élémentaire, le déterminant a bien la valeur annoncée. ■

1.4. Déterminant de la transposée

Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det\left(A^T\right) = \det(A)$

Cette propriété, délicate à démontrer est admise.
En pratique, cela signifie que toute propriété sur les colonnes est applicable sur les lignes.
Par exemple, si A a deux lignes identiques, son déterminant est nul : A^T ayant deux colonnes égales a un déterminant nul !

1.5. Manipulation de colonnes

Théorème : On ne change pas la valeur d'un déterminant si, à une colonne, ou une ligne, on ajoute une combinaison linéaire des **autres** colonnes, ou lignes.

Démonstration : On fait jouer la linéarité par rapport à la colonne, ou la ligne, modifiée.
On se retrouve avec le déterminant de départ et une somme de déterminants nuls puisqu'ils ont deux colonnes, ou lignes, égales. ■

Remarque : On utilise souvent ceci pour « faire apparaitre des 0 » dans une ligne ou une colonne.

1.6. Déterminant d'une matrice triangulaire.

Théorème : $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & z \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n$$

Autrement dit, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale.

Démonstration : On factorise par a_1, et, en enlevant le bon nombre de fois le premier vecteur aux autres, on amène des 0 sur la première ligne et on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & \cdots & y \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & s & & t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & u \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

On recommence ensuite avec a_2. On obtient ainsi de suite par une récurrence admise :

$$\Delta = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n$$ ■

1.7. Déterminant d'un produit de 2 matrices, de la matrice inverse d'une matrice inversible

Théorème : $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

Théorème : $A \in GL_n(\mathbb{K})$

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Démonstration : $A \times A^{-1} = I_n$, $\det(I_n) = 1$,
d'où : $\det(A) \times \det\left(A^{-1}\right) = 1$
On en conclut que $\det(A) \neq 0$, l'égalité annocée en découle immédiatement. ■

Théorème : $A \in \mathcal{M}_n$, on a alors : A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Démonstration : On a déjà montré que A inversible $\Rightarrow \det(A) \neq 0$.
Montrons maintenant la réciproque.
On sait que A est inversible si et seulement si elle transforme une base en une autre base, c'est à dire si et seulement si, les vecteurs colonne de A forment une base.
Supposons que A ne soit pas inversible, cela revient à ce que les vecteurs colonne de A forment une famille liée, c'est à dire qu'une des colonne est combinaison linéaire des autres.
On enlève à cette colonne cette combinaison linéaire des autres colonnes, on obtient un déterminant d'une matrice avec une colonne nulle, qui est donc nul.
La réciproque est démontrée. ■

1.8. Déterminant de 2 matrices semblables

> On rappelle que deux matrices sont semblables si et seulement si :
> - elles sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, ou bien,
> - il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

Théorème : A et B, 2 matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : $\det(A) = \det(B)$

Démonstration : On a $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$, d'où :

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det\left(P^{-1}\right) \times \det(A) \times \det(P) \\
&= \det\left(P^{-1}\right) \times \det(P) \times \det(A) \\
&= \det\left(P^{-1} \times P\right) \times \det(A) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

■

2. Calcul de déterminants

2.1. En dimension 2 et 3

On va d'abord rappeler un résultat bien connu :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

En dimension 3, on peut utiliser la règle de Sarrus, qui se montre de la même façon, en n'oubliant pas qu'elle n'est **absolument pas généralisable** à un ordre autre que 3...

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

2.2. Développement suivant une ligne ou une colonne

La règle des signes est : $\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \cdots & \cdots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & & & & \\ + & - & + & & (-1)^{i+j} & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & + & - \\ (-1)^{n+1} & & & & & - & + \end{vmatrix}$

On remarque qu'on a $(-1)^{i+j}$ en $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne.

On développe suivant une ligne ou une colonne en tenant compte de la règle de signes $(-1)^{i+j} a_{ij}\,\Delta_{ij}$ où a_{ij} est le coefficient de la matrice et Δ_{ij} est le déterminant obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j correspondante. On admet ce résultat.

Théorème : On peut développer selon la $j^{\text{ème}}$ colonne :

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\,\Delta_{ij}$

ou développer selon la $i^{\text{ème}}$ ligne :

$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\,\Delta_{ij}$

Il est important de noter qu'on peut **choisir** sa ligne ou sa colonne.

Un déterminant est donc un **polynôme** des coefficients de la matrice...

2.3. Exemples

On notera les déterminants avec un indice qui correspond à leur rang, qui est toujours plus grand que 1.

a/ Utilisation d'une formule de récurrence

Soit le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_n$ qu'on développe selon la $1^{\text{ère}}$ colonne,

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

en développant ce déterminant selon la 1ère ligne.

On obtient ainsi la relation de récurrence $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ qu'on résout en calculant Δ_1 et Δ_2.

b/ Manipulation de lignes ou colonnes

Soit le déterminant $\Delta_n = |\mathrm{abs}\,(i-j)|_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}_n$ avec $n \geqslant 3$.

A chaque ligne, de la dernière à la seconde, on enlève la précédente. Ces opérations sont faites successivement... Il faut bien vérifier qu'on peut les faire successivement et qu'on n'utilise pas une ligne ou une colonne qui a été modifiée... et qui donc n'existe plus !

On obtient donc : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}_n$

A chaque ligne, de la dernière à la troisième, on enlève la précédente. Ces opérations sont faites successivement...

On obtient donc, en développant successivement selon la première et la dernière colonne :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}_n = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 \\ 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = -(-1)^n (n-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix}_{n-2}$$

Enfin, $\Delta_n = (-1)^{n+1}(n-1)\,2^{n-2}$.

3. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

3.1. Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition : Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n.
Le déterminant de cette famille de vecteurs dans une base $\mathscr{B}$ est le déterminant de la matrice formée des vecteurs colonne des coordonnées des u_i dans la base $\mathscr{B}$.
On le note encore « det », en faisant au besoin référence à la base $\mathscr{B}$: $\det_{\mathscr{B}}$.

Exemple : Dans un espace vectoriel de dimension 3, muni de la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$,

$$\det_{\mathscr{B}}(e_1 - e_3, 2\,e_2 + e_3, e_1 - e_2 + e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

3.2. Interprétation géométrique

On a déjà vu cette interprétation en début de chapitre, on la rappelle ici :

- En dimension 2, le déterminant est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Cette aire est positive si $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est direct, négative si c'est indirect.
- En dimension 3, le déterminant est le volume algébrique du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Ce volume est positif si $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est direct, négatif si c'est indirect.

La seule chose particulière est que le résultat ne dépend pas de la base sous réserve qu'on travaille dans une base orthonormale directe !

3.3. Caractérisation des bases

Théorème : La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n est une base si est seulement si, dans n'importe quelle base $\mathscr{B}$, $\det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$

Démonstration : C'est une base si et seulement si la matrice des coordonnées dans $\mathscr{B}$ est inversible, c'est dire si et seulement si le déterminant de cette matrice est non nul, mais ce déterminant est aussi le déterminant de la famille de vecteurs dans $\mathscr{B}$! ■

4. Déterminant d'un endomorphisme

4.1. Déterminant d'un endomorphisme dans une base

Définition : E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}$.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, et A sa matrice dans la base $\mathscr{B}$: $\mathrm{A} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.
Alors : $\det_{\mathscr{B}}(\varphi) = \det(\mathrm{A}) = \det\left(\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)\right)$.

4.2. Déterminant d'un endomorphisme

Théorème : E un espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, alors : $\det_{\mathscr{B}}(\varphi) = \det_{\mathscr{B}'}(\varphi)$.
Le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on travaille.

Démonstration : Soit $\mathrm{A} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)$, et $\mathrm{A}' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$, on a alors : $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$, avec P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$.
$\det(\mathrm{A}') = \det \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \det(\mathrm{P}^{-1})\det(\mathrm{A})\det(\mathrm{P}) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{P})}\det(\mathrm{A})\det(\mathrm{P}) = \det(\mathrm{A})$.
Ce qui prouve le résultat annoncé. ■

On avait d'ailleurs déjà vu que deux matrices semblables avaient le même déterminant !

4.3. Déterminant de la composée de deux endomorphismes

Théorème : E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}$.
Soit $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, alors : $\det(\psi \circ \varphi) = \det(\psi) \times \det(\varphi)$.

Démonstration : On se place dans la base $\mathscr{B}$, alors : $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\psi \circ \varphi) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\psi) \times \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.
Et comme le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants, on a le résultat annoncé. ■

4.4. Caractérisation des automorphismes

Théorème : E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, alors : φ est un automorphisme $\Leftrightarrow \det(\varphi) \neq 0$.

Démonstration : On a un automorphisme si et seulement si il transforme une base en une autre base, c'est à dire si et seulement si sa matrice dans une base est inversible. ■

4.5. Déterminant de l'endomorphisme réciproque

Théorème : E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\varphi \in \mathsf{GL}(E)$, alors : $\Leftrightarrow \det(\varphi^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\varphi)}$.

Démonstration : Dans une base $\mathscr{B}$, la matrice de φ^{-1} est l'inverse de la matrice de φ, ce qui donne immédiatement le résultat. ■