Cours 2 : Applications linéaires, introduction des matrices

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module complémentaire de maths, année 2012

Avertissement : A propos de la chronologie des notions mathématiques introduites...

Rappels sur les vecteurs

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Rappels sur les vecteurs

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On peut définir les opérations suivantes :

- Addition de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

Rappels sur les vecteurs

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On peut définir les opérations suivantes :

- Addition de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$
- Multiplication externe par le réel λ. On a $\lambda.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

Rappels sur les vecteurs

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On peut définir les opérations suivantes :

- Addition de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$
- Multiplication externe par le réel λ. On a $\lambda.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

Par la suite, pour alléger les notations, souvent on ne mettra plus les flèches sur les vecteurs.

1. Application linéaires
   - Exemples concrets
   - Définition
   - Exemples et contre exemples
   - Deux ensembles particuliers associés à une application linéaire
2. Vers les matrices
   - Notions de base de $\mathbb{R}^n$
   - Forme d'une application linéaire
   - Matrices
3. Opérations sur les matrices
   - Addition, soustraction
   - Multiplication externe
   - Multiplication interne
   - Notion d'inverse d'une application linéaire et d'une matrice

1. Application linéaires
   - Exemples concrets
   - Définition
   - Exemples et contre exemples
   - Deux ensembles particuliers associés à une application linéaire
2. Vers les matrices
   - Notions de base de $\mathbb{R}^n$
   - Forme d'une application linéaire
   - Matrices
3. Opérations sur les matrices
   - Addition, soustraction
   - Multiplication externe
   - Multiplication interne
   - Notion d'inverse d'une application linéaire et d'une matrice

Point de départ : exemple 1

Une entreprise utilise des objets de type 1 et 2 pour fabriquer des produits. Un objet de type 1 coûte 5 euros tandis qu'un objet de type 2 coûte 2 euros.

Point de départ : exemple 1

Une entreprise utilise des objets de type 1 et 2 pour fabriquer des produits. Un objet de type 1 coûte 5 euros tandis qu'un objet de type 2 coûte 2 euros.
Soient x_1 et x_2 les nombre d'objets de type 1 et 2, utilisés sur un mois et soit c le coût mensuel de ces objets pour l'entreprise.

Point de départ : exemple 1

Une entreprise utilise des objets de type 1 et 2 pour fabriquer des produits. Un objet de type 1 coûte 5 euros tandis qu'un objet de type 2 coûte 2 euros.
Soient x_1 et x_2 les nombre d'objets de type 1 et 2, utilisés sur un mois et soit c le coût mensuel de ces objets pour l'entreprise. On a :

$$\begin{aligned} c : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto 5x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Point de départ : exemple 1

Quitte à "regarder" des quantités algébriques, on peut étendre la fonction coût c en une fonction sur des espaces plus grand (que l'on notera encore c)

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto 5x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Point de départ : exemple 1

Quitte à "regarder" des quantités algébriques, on peut étendre la fonction coût c en une fonction sur des espaces plus grand (que l'on notera encore c)

$$\begin{array}{rcl} c : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & 5x_1 + 2x_2 \end{array}$$

La fonction c posséde les propriétés suivantes.

- Pour tout (x_1, x_2) et pour tout (x_1', x_2'), on a
$$c(x_1 + x_1', x_2 + x_2') = c(x_1, x_2) + c(x_1', x_2').$$
- Pour tout λ réel, on a :
$$c(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda c(x_1, x_2).$$

Point de départ : exemple 1

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto 5x_1 + 2x_2. \end{aligned}$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$

Point de départ : exemple 1

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto 5x_1 + 2x_2. \end{aligned} \quad \text{Posons } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Ecriture "condensée" de ces propriétés :

- pour tout X, X' de $\mathbb{R}^2$, $\quad c(X + X') = c(X) + c(X')$,
- pour tout λ de $\mathbb{R}$, $\quad c(\lambda X) = \lambda\, c(X)$.

Point de départ : exemple 2

En fonction du niveau de qualification, une entreprise employe 3 types de personnes :

- Type A, salaire mensuel 2100 euros.
- Type B, salaire mensuel 1750 euros.
- Type C, salaire mensuel 1500 euros.

Point de départ : exemple 2

En fonction du niveau de qualification, une entreprise emploie 3 types de personnes :

- Type A, salaire mensuel 2100 euros.
- Type B, salaire mensuel 1750 euros.
- Type C, salaire mensuel 1500 euros.

Soient n_A, n_B et n_C les effectifs de chaque type de personnes dans l'entreprise.

Point de départ : exemple 2

En fonction du niveau de qualification, une entreprise emploie 3 types de personnes :

- Type A, salaire mensuel 2100 euros.
- Type B, salaire mensuel 1750 euros.
- Type C, salaire mensuel 1500 euros.

Soient n_A, n_B et n_C les effectifs de chaque type de personnes dans l'entreprise. Soit f la fonction qui au triplet (n_A, n_B, n_C) associe le couple (coût salarial, effectif total).

Point de départ : exemple 2

En fonction du niveau de qualification, une entreprise emploie 3 types de personnes :

- Type A, salaire mensuel 2100 euros.
- Type B, salaire mensuel 1750 euros.
- Type C, salaire mensuel 1500 euros.

Soient n_A, n_B et n_C les effectifs de chaque type de personnes dans l'entreprise. Soit f la fonction qui au triplet (n_A, n_B, n_C) associe le couple (coût salarial, effectif total).

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N}^3 & \to & \mathbb{N}^2 \\ \begin{pmatrix} n_A \\ n_B \\ n_C \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2100 n_A + 1750 n_B + 1500 n_C \\ n_A + n_B + n_C \end{pmatrix} \end{array}$$

Point de départ : exemple 2

Là encore, on peut étendre f,

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} n_A \\ n_B \\ n_C \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2100 n_A + 1750 n_B + 1500 n_C \\ n_A + n_B + n_C \end{pmatrix} \end{array}$$

Point de départ : exemple 2

Là encore, on peut étendre f,

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} n_A \\ n_B \\ n_C \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2100n_A + 1750n_B + 1500n_C \\ n_A + n_B + n_C \end{pmatrix} \end{array}$$

Et f possède également les propriétés de linéarité suivantes (regroupées).

- $\forall N, N' \in \mathbb{R}^3, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda N + \mu N') = \lambda f(N) + \mu f(N'),$

Définition

Definition

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est dite linéaire si*

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y).$$

Définition

Definition

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est dite linéaire si*

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y).$$

En particulier, on a :
$f(\lambda X) = \lambda f(X),\ f(X + Y) = f(X) + f(Y),\ f(-X) = -f(X)$, etc...

Définition

Definition

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est dite linéaire si*

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y).$$

En particulier, on a :
$f(\lambda X) = \lambda f(X)$, $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$, $f(-X) = -f(X)$, etc...

Remarque

Si f *application linéaire,* $f(0) = 0$*. (Attention* 0 *représente le vecteur nul de* $\mathbb{R}^n$*.)*

- Réfléchir aux applications linéaire de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Réfléchir aux applications linéaire de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Linéarité des applications suivantes :

- Réfléchir aux applications linéaire de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Linéarité des applications suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+3y \\ -4y+x \\ x-y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, on verra qu'on peut définir $f : U \to \mathbb{R}^m$ application linéaire si U est un ensemble avec des "bonnes" propriétés de stabilité...

Deux ensembles particuliers

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Definition

On appelle noyau de f, l'ensemble suivant :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

(Attention ici le 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$)

Deux ensembles particuliers

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Definition

On appelle noyau de f, l'ensemble suivant :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

(Attention ici le 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$)
On appelle image de f, l'ensemble suivant :

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{f(x);\ x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Deux ensembles particuliers

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Definition

On appelle noyau de f, l'ensemble suivant :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

(Attention ici le 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$)
On appelle image de f, l'ensemble suivant :

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{f(x);\ x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Deux ensembles particuliers

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Definition

On appelle noyau de f, l'ensemble suivant :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

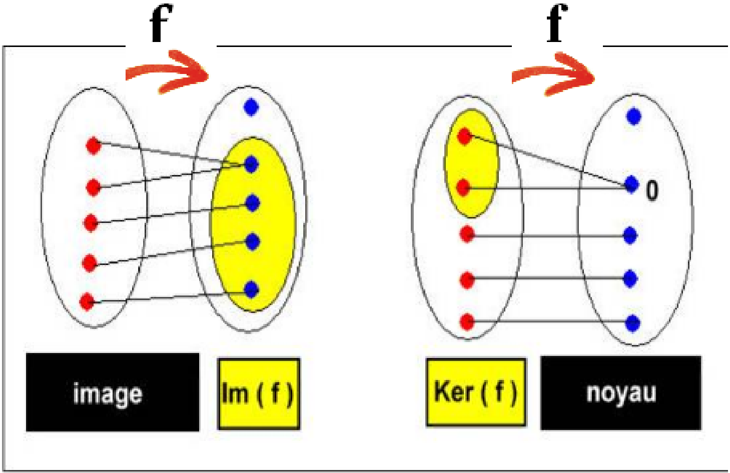
(Attention ici le 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$)
On appelle image de f, l'ensemble suivant :

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{f(x);\ x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Remarque

$Ker(f)$ et $Im(f)$ ont une structure particulière, qd f appli lin...(cf

Schéma récapitulatif



Base

Definition

(provisoire) Soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit B la famille constituée de ces n vecteurs, $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On dit que B est une base de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique dans B.

ie : $\forall u \in \mathbb{R}^n, \; \exists! x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n, \quad u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$

Base

Definition

(provisoire) Soient $e_1, e_2, \dots, e_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit B la famille constituée de ces n vecteurs, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. On dit que B est une base de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique dans B.

ie : $\forall u \in \mathbb{R}^n, \ \exists! x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n, \quad u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille usuelle $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$ est une base. En effet, pour tout vecteur $\vec{u} = (x, y)$, on a :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Base

Definition

(provisoire) Soient $e_1, e_2, \dots, e_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit B la famille constituée de ces n vecteurs, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. On dit que B est une base de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique dans B.

ie : $\forall u \in \mathbb{R}^n, \ \exists! x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n, \quad u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille usuelle $\overrightarrow{i} = (1, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ est une base. En effet, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y)$, on a :

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}.$$

Base

Exemples (suite) :

- De manière analogue, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$ et $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ est une base.

Base

Exemples (suite) :

- De manière analogue, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$ et $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ est une base.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille réduite à $\overrightarrow{e} = (2, 3)$ n'est pas une base.

Base

Exemples (suite) :

- De manière analogue, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ est une base.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille réduite à $\overrightarrow{e} = (2,3)$ n'est pas une base.En effet, on ne peut (par exemple) pas écrire le vecteur $(0,1)$ dans cette base.

Base

Exemples (suite) :

- De manière analogue, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ est une base.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille réduite à $\overrightarrow{e} = (2,3)$ n'est pas une base.En effet, on ne peut (par exemple) pas écrire le vecteur $(0,1)$ dans cette base.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,3)$, $e_3 = (-2,1)$ n'est pas une base.

Base

Exemples (suite) :

- De manière analogue, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ est une base.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille réduite à $\overrightarrow{e} = (2,3)$ n'est pas une base.En effet, on ne peut (par exemple) pas écrire le vecteur $(0,1)$ dans cette base.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,3)$, $e_3 = (-2,1)$ n'est pas une base. En effet, tout vecteur se décompose bien dans cette famille, mais pas de manière unique. Par exemple, soit $u = (6,-3)$, on a :

$$u = 0e_1 + 0e_2 - 3e_3 = 6e_1 - e_2 + 0e_3.$$

Base

Exemples (suite) :

- De manière analogue, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ est une base.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille réduite à $\overrightarrow{e} = (2,3)$ n'est pas une base.En effet, on ne peut (par exemple) pas écrire le vecteur $(0,1)$ dans cette base.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $e_1 = (1,0), e_2 = (0,3), e_3 = (-2,1)$ n'est pas une base. En effet, tout vecteur se décompose bien dans cette famille, mais pas de manière unique. Par exemple, soit $u = (6,-3)$, on a :

$$u = 0e_1 + 0e_2 - 3e_3 = 6e_1 - e_2 + 0e_3.$$

- Dans $\mathbb{R}$, la famille $e_1 = (1)$ est une base.

Base

Exemples (suite) :

- De manière analogue, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ est une base.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille réduite à $\overrightarrow{e} = (2,3)$ n'est pas une base.En effet, on ne peut (par exemple) pas écrire le vecteur $(0,1)$ dans cette base.
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $e_1 = (1,0), e_2 = (0,3), e_3 = (-2,1)$ n'est pas une base. En effet, tout vecteur se décompose bien dans cette famille, mais pas de manière unique. Par exemple, soit $u = (6,-3)$, on a :

$$u = 0e_1 + 0e_2 - 3e_3 = 6e_1 - e_2 + 0e_3.$$

- Dans $\mathbb{R}$, la famille $e_1 = (1)$ est une base.

Base

Remarque

On verra par la suite, une définition plus "abstraite" mais plus "précise" de la notion de base. En particulier, on verra qu'une base de $\mathbb{R}^n$ doit contenir n vecteurs. (n s'appelle la dimension.)

Forme d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et
$B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

Forme d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

Fait : Pour connaître "parfaitement" f (ie : être capable de calculer $f(u)$ pour tout vecteur u), il suffit de connaître les n vecteurs suivants : $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$.

Forme d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

Fait : Pour connaître "parfaitement" f (ie : être capable de calculer $f(u)$ pour tout vecteur u), il suffit de connaître les n vecteurs suivants : $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$.

En effet, soit $u \in \mathbb{R}^n$. Par définition d'une base, u se décompose de manière unique dans B,

Forme d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et
$B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

Fait : Pour connaître "parfaitement" f (ie : être capable de calculer $f(u)$ pour tout vecteur u), il suffit de connaître les n vecteurs suivants : $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$.

En effet, soit $u \in \mathbb{R}^n$. Par définition d'une base, u se décompose de manière unique dans B,
ie : il existe des réels $x_1, x_1, \ldots, x_n$ tels que
$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$.

Forme d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

Fait : Pour connaître "parfaitement" f (ie : être capable de calculer $f(u)$ pour tout vecteur u), il suffit de connaître les n vecteurs suivants : $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$.

En effet, soit $u \in \mathbb{R}^n$. Par définition d'une base, u se décompose de manière unique dans B,
ie : il existe des réels $x_1, x_1, \ldots, x_n$ tels que
$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$.
Ainsi, On a :

$$\begin{aligned} f(u) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + x_1 f(e_2) + ... + x_n f(e_n). \end{aligned}$$

Exemples d'application du fait

- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaire, il suffit par ex de connaître $f(1)$. Ainsi $f(x) = xf(1)$

Exemples d'application du fait

- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaire, il suffit par ex de connaître $f(1)$. Ainsi $f(x) = xf(1)$
- Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linéaire, il suffit par ex de connaître $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Exemples d'application du fait

- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaire, il suffit par ex de connaître $f(1)$. Ainsi $f(x) = xf(1)$
- Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linéaire, il suffit par ex de connaître $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.Posons $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d\\g\\h\end{pmatrix}$

Exemples d'application du fait

- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaire, il suffit par ex de connaître $f(1)$. Ainsi $f(x) = xf(1)$
- Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linéaire, il suffit par ex de connaître $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.Posons $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d\\g\\h\end{pmatrix}$

  On a alors :

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+dy\\bx+gy\\cx+hy\end{pmatrix}.$$

Matrices

Partons de l'exemple précédent $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linéaire.

Matrices

Partons de l'exemple précédent $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire.

- Etant donné la base $B_{dep} = ((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ (base de l'espace de départ).

Matrices

Partons de l'exemple précédent $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linéaire.

- Etant donné la base $B_{dep} = ((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ (base de l'espace de départ).
- Etant donné la base $B_{arr} = ((1,0,0),(1,0,1),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ (base de l'espace d'arrivée).

Matrices

Partons de l'exemple précédent $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linéaire.

- Etant donné la base $B_{dep} = ((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ (base de l'espace de départ).
- Etant donné la base $B_{arr} = ((1,0,0),(1,0,1),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ (base de l'espace d'arrivée).
- Et étant donné l'application linéaire f,

Matrices

Partons de l'exemple précédent $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linéaire.

- Etant donné la base $B_{dep} = ((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ (base de l'espace de départ).
- Etant donné la base $B_{arr} = ((1,0,0),(1,0,1),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ (base de l'espace d'arrivée).
- Et étant donné l'application linéaire f,

Matrices

Partons de l'exemple précédent $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linéaire.

- Etant donné la base $B_{dep} = ((1,0),(0,1))$ de $\mathbb{R}^2$ (base de l'espace de départ).
- Etant donné la base $B_{arr} = ((1,0,0),(1,0,1),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ (base de l'espace d'arrivée).
- Et étant donné l'application linéaire f,

on associe le *tableau* suivant que l'on appelera matrice de f dans les bases B_{dep} et B_{arr}.

$$M_{B_{dep},B_{arr}}(f) = \begin{pmatrix} a & d \\ b & g \\ c & h \end{pmatrix}$$

Matrices dans le cas général

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire.

Matrices dans le cas général

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire.

- Etant donné une base $B_{dep} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (base de l'espace de départ).

Matrices dans le cas général

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire.

- Etant donné une base $B_{dep} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (base de l'espace de départ).
- Etant donné une base $B_{arr} = (f_1, \dots, f_m)$ de $\mathbb{R}^m$ (base de l'espace d'arrivée).

Matrices dans le cas général

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire.

- Etant donné une base $B_{dep} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (base de l'espace de départ).
- Etant donné une base $B_{arr} = (f_1, \dots, f_m)$ de $\mathbb{R}^m$ (base de l'espace d'arrivée).

Matrices dans le cas général

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire.

- Etant donné une base $B_{dep} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (base de l'espace de départ).
- Etant donné une base $B_{arr} = (f_1, \dots, f_m)$ de $\mathbb{R}^m$ (base de l'espace d'arrivée).

On associe le *tableau* suivant, appelé matrice de f dans les bases B_{dep} et B_{arr}, constitué des vecteurs $f(e_i)$ décomposés dans B_{arr}.

Matrices dans le cas général

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire.

- Etant donné une base $B_{dep} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (base de l'espace de départ).
- Etant donné une base $B_{arr} = (f_1, \ldots, f_m)$ de $\mathbb{R}^m$ (base de l'espace d'arrivée).

On associe le *tableau* suivant, appelé matrice de f dans les bases B_{dep} et B_{arr}, constitué des vecteurs $f(e_i)$ décomposés dans B_{arr}.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ M_{B_{dep},B_{arr}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} f(e_1) \\ \downarrow \end{array} \\ M_{B_{dep},B_{arr}}(f) = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} , \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} f(e_1) \\ \downarrow \end{array} & \\
M_{B_{dep},B_{arr}}(f) = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array}
\end{array},
$$

Par exemple on a :

$$
f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} = a_{1,1} f_1 + a_{2,1} f_2 + \ldots + a_{m,1} f_m
$$

$$M_{B_{dep},B_{arr}}(f) \quad = \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & f(e_2) & & \\ & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \color{blue}{a_{1,2}} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \color{blue}{a_{2,2}} & & a_{2,n} \\ \vdots & \color{blue}{\vdots} & & \vdots \\ a_{m,1} & \color{blue}{a_{m,2}} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \end{array} ,$$

$$M_{B_{dep},B_{arr}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & f(e_2) & & \\ & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \end{array},$$

Par exemple on a :

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} = a_{1,2}f_1 + a_{2,2}f_2 + \ldots + a_{m,2}f_m$$

Matrices

On notera l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices à m lignes et n colonnes. On manipulera assez "souvent" des matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, dites *carrés*.

Matrices

On notera l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices à m lignes et n colonnes. On manipulera assez "souvent" des matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, dites *carrés*.

Remarque

Si l'on choisit une autre base (arrivée ou départ), evidemment la matrice de f change !

Quelques matrices particuliéres

Reconnaître les applications linéaires sous-jacentes :

Quelques matrices particuliéres

Reconnaître les applications linéaires sous-jacentes :

- $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

Quelques matrices particuliéres

Reconnaître les applications linéaires sous-jacentes :

- $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, application identité, $f(x) = x$ pour tout x.

Quelques matrices particuliéres

Reconnaître les applications linéaires sous-jacentes :

- $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, application identité, $f(x) = x$ pour tout x.
- $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$,

Quelques matrices particuliéres

Reconnaître les applications linéaires sous-jacentes :

- $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, application identité, $f(x) = x$ pour tout x.
- $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$, rotation d'angle θ

Addition, soustraction

$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, linéaires. on peut définir l'application $f + g$ par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Addition, soustraction

$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, linéaires. on peut définir l'application $f + g$ par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Soient B, B' bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, matrices respectives de f et g dans ces bases.

Addition, soustraction

$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, linéaires. on peut définir l'application $f+g$ par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Soient B, B' bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, matrices respectives de f et g dans ces bases.

Question : matrice de l'application (linéaire) $f+g$ dans ces bases ?

Addition, soustraction

$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, linéaires. on peut définir l'application $f + g$ par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Soient B, B' bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, matrices respectives de f et g dans ces bases.

Question : matrice de l'application (linéaire) $f + g$ dans ces bases ?

Quelques secondes de réfléctions, donnent que :

$$M_{B,B'}(f + g) = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j}$$

Addition, soustraction

$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, linéaires. on peut définir l'application $f + g$ par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Soient B, B' bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, matrices respectives de f et g dans ces bases.

Question : matrice de l'application (linéaire) $f + g$ dans ces bases ?

Quelques secondes de réfléctions, donnent que :

$$M_{B,B'}(f+g) = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j}$$

Definition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ $A = (a_{i,j})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}$ $B = (b_{i,j})$, on pose

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}).$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 9 & 9 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 9 & 9 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

On pratique de manière similaire pour la soustraction...

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 9 & 9 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

On pratique de manière similaire pour la soustraction...
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplication externe

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on peut définir l'application λf par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Multiplication externe

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on peut définir l'application λf par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
Comme pour l'addition, on définit alors la multiplication d'une matrice A par un réel λ de telle sorte que ces "propriétés" se conservent sur les matrices...

Multiplication externe

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on peut définir l'application λf par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
Comme pour l'addition, on définit alors la multiplication d'une matrice A par un réel λ de telle sorte que ces "propriétés" se conservent sur les matrices...

Definition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ $A = (a_{i,j})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j}).$$

Multiplication externe

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on peut définir l'application λf par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
Comme pour l'addition, on définit alors la multiplication d'une matrice A par un réel λ de telle sorte que ces "propriétés" se conservent sur les matrices...

Definition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ $A = (a_{i,j})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j}).$$

Exemple : $5 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 20 & -15 \end{pmatrix}$

Multiplication interne

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire,

Multiplication interne

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire, on peut naturellement définir l'application :

$$\begin{array}{rcl} fog : \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$$

Multiplication interne

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire, on peut naturellement définir l'application :

$$\begin{array}{rcl} fog : \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$$

On définit le produit matriciel de telle sorte que dans les bases "compatibles" le produit de la matrice de f par la matrice de g représente la matrice de fog. (voir poly pour détails)
On veut que le produit matriciel "code" la composition des applications...

Definition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ $A = (a_{i,j})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ $B = (b_{i,j})$, *on pose*

$$AB = C, \quad avec\ c_{i,j} = \sum_{k=1\ldots n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Definition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ $A = (a_{i,j})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ $B = (b_{i,j})$, *on pose*

$$AB = C, \quad \text{avec } c_{i,j} = \sum_{k=1\ldots n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Attention $AB \neq BA$!

Disposition des calculs

$$
\begin{array}{cc}
\times & \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 1 \\ -2 & -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -6 & 0 & 7 & 6 \\ 12 & -2 & -8 & -8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Exemples de produits de matrices

- $$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 6 & 9 & 11 \\ 7 & 5 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemples de produits de matrices

- $$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 11 \\ 7 & 5 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rappel : Notion d'application bijective

Definition

Soit $f : U \to V$ une application. On dit que f est bijective si pour tout y de V, il existe un unique x dans U tel que $f(x) = y$.

Rappel : Notion d'application bijective

Definition

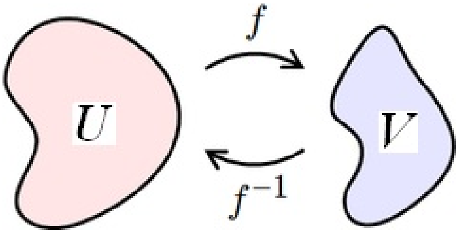
Soit $f : U \to V$ une application. On dit que f est bijective si pour tout y de V, il existe un unique x dans U tel que $f(x) = y$.

Notion d'inverse d'un application linéaire bijective

Dans le cas où f est bijective, on peut lui fabriquer une application inverse notée f^{-1}

$$f^{-1} : V \to U$$

qui à chaque y de V associe l'unique x de U tel que $y = f(x)$.

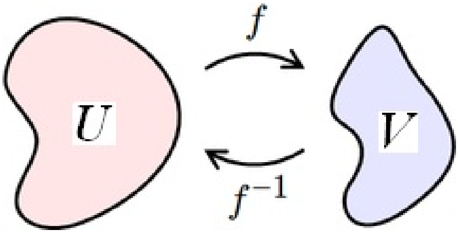


Notion d'inverse d'un application linéaire bijective

Dans le cas où f est bijective, on peut lui fabriquer une application inverse notée f^{-1}

$$f^{-1} : V \to U$$

qui à chaque y de V associe l'unique x de U tel que $y = f(x)$.



Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- pour tout x dans U, $\quad f^{-1}(f(x)) = x$,

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- pour tout x dans U, $\quad f^{-1}(f(x)) = x,$

$$ie : \quad f^{-1} o f = Id_U$$

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- pour tout x dans U, $\quad f^{-1}(f(x)) = x,$

$$ie : \quad f^{-1} of = Id_U$$

- pour tout y dans V, $\quad f(f^{-1}(y)) = y,$

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- pour tout x dans U, $\quad f^{-1}(f(x)) = x$,

$$ie: \quad f^{-1} o f = Id_U$$

- pour tout y dans V, $\quad f(f^{-1}(y)) = y$,

$$ie: \quad f o f^{-1} = Id_V$$

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- pour tout x dans U, $\quad f^{-1}(f(x)) = x,$

$$ie : \quad f^{-1} of = Id_U$$

- pour tout y dans V, $\quad f(f^{-1}(y)) = y,$

$$ie : \quad fof^{-1} = Id_V$$

- si f linéaire, alors f^{-1} linéaire.

Définition de l'inverse d'une matrice

Puisque une matrice est une représentation d'une application linéaire (dans de certaines bases), la notion d'inverse d'une application linéaire se translate aux matrices...

Définition de l'inverse d'une matrice

On considère une application linéaire bijective $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Soit B_d et B_a des bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

Définition de l'inverse d'une matrice

On considère une application linéaire bijective $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Soit B_d et B_a des bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.
- Soit A la matrice de f dans les bases B_d et B_a

Définition de l'inverse d'une matrice

On considère une application linéaire bijective $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Soit B_d et B_a des bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.
- Soit A la matrice de f dans les bases B_d et B_a
- Soit B la matrice de f^{-1} dans les bases B_a et B_d

Définition de l'inverse d'une matrice

Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$f^{-1} o f = Id_{\mathbb{R}^n} \quad f o f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^m}$$

on déduit :

Définition de l'inverse d'une matrice

Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$f^{-1} o f = Id_{\mathbb{R}^n} \quad f o f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^m}$$

on déduit :

$$BA = Id_n \quad AB = Id_m,$$

Définition de l'inverse d'une matrice

Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$f^{-1} o f = Id_{\mathbb{R}^n} \quad f o f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^m}$$

on déduit :

$$BA = Id_n \quad AB = Id_m,$$

où $Id_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (de taille n) et $Id_m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (de taille m)

Définition de l'inverse d'une matrice

Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$f^{-1}of = Id_{\mathbb{R}^n} \quad fof^{-1} = Id_{\mathbb{R}^m}$$

on déduit :

$$BA = Id_n \quad AB = Id_m,$$

où $Id_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (de taille n) et $Id_m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (de taille m)

Definition

La matrice B s'appelle la matrice inverse de A. On la note parfois A^{-1}.

Cours suivant...

- Critère d'inversibilité : le déterminant.

A suivre...

Cours suivant...

- Critère d'inversibilité : le déterminant.
- Méthode pratique pour inverser une matrice : Algorithme du pivot de Gauss.

A suivre...

Cours suivant...

- Critère d'inversibilité : le déterminant.
- Méthode pratique pour inverser une matrice : Algorithme du pivot de Gauss.

A suivre...