L1 MASS : Algèbre Linéaire Cours 31 janvier 2006

Le rang

On rappelle une définition du cours précédent :

Définition. Une matrice B est dite **échelonnée en lignes** si
- chaque ligne non nulle de B commence avec strictement plus de 0 que la ligne précédente, et
- les lignes nulles (ne contenant que des 0) de B viennent en bas après les lignes non nulles.

Toute matrice A peut se réduire à une matrice échelonnée en lignes B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On appelle B la **forme échelonnée en lignes** de A.

Une des concepts fondamentaux dans l'algèbre linéaire est le *rang* d'une matrice. Il admet de plusieurs définitions équivalentes. En voici la première.

Définition. Le **rang** d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles dans sa forme échelonnée en lignes. On le note $\operatorname{rg} A$.

Par exemple la matrice suivante A se réduit en sa forme échelonnée en lignes par les pivotages

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc on a $\operatorname{rg} A = 3$. Pour la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a $\operatorname{rg} C = 2$.

Théorème 1. *Pour toute matrice A on a*

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A &\leq \textit{nombre de lignes de } A, \\ \operatorname{rg} A &\leq \textit{nombre de colonnes de } A. \end{aligned}$$

Idée de la preuve. En réduisant la matrice A en une matrice échelonnée en lignes similaire à celle-ci

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

les *pivots* (les premiers coefficients non nuls des lignes non nulles) sont dans *lignes distinctes* et dans des *colonnes distinctes*. Donc on a

$$\begin{aligned} \text{nombre de pivots} &\leq \text{nombre de lignes de } A, \\ \text{nombre de pivots} &\leq \text{nombre de colonnes de } A. \end{aligned}$$

Le nombre de pivots est aussi le nombre de lignes non nulles de la forme échelonnée de A, d'où

$$\text{nombre de pivots} = \operatorname{rg} A. \qquad \square$$

La matrice des coefficients

On peut associer une matrice à chaque membre d'un système linéaire. Pour le système

$$(\ddagger)\qquad \begin{cases} x - 3y + 6z + 2w = -1, \\ 2x - 5y + 10z + 3w = 0, \\ 3x - 8y + 17z + 4w = 1, \end{cases}$$

on a des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

avec A la **matrice des coefficients** regroupant les coefficients des variables du membre de gauche du système, et le vecteur colonne $\mathbf{b}$ contient le membre de droite. Quand on met les deux ensemble, on a la **matrice augmentée** qu'on a déjà vue

$$\widehat{A} = \left(\, A \; \middle| \; \mathbf{b} \, \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 10 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 17 & 4 & 1 \end{array} \right).$$

Le rang et les systèmes linéaires

On va étudier les systèmes linéaires en considérant le membre de gauche comme fixe, mais le membre de droite comme éventuellement variable. Dans cette optique, il est convenable de considérer le rang d'un système linéaire comme dépendant uniquement de son membre de gauche. D'où :

Définition. Le **rang** d'un système linéaire est le rang de sa matrice des coefficients A.

Par exemple, le rang du système (‡) est 3, selon les calculs faits sur la page précédente.

Pour résoudre un système linéaire on fait des opérations élémentaires et pivotages soit sur les équations, soit sur la matrice augmentée $\widehat{A}$. A la fin, la forme échelonnée du système linéaire correspond à la forme échelonnée en lignes de $\widehat{A}$, et le membre gauche du système échelonné correspond à la forme échelonnée en lignes de la matrice des coeffients A. On en déduit :

> $\operatorname{rg} \widehat{A} =$ nombre de lignes du système échelonné non de la forme $0 = 0$.
> $\operatorname{rg} A =$ nombre de lignes du système échelonné non de la forme $0 = 0$ ou $0 = c$ avec c non nul.

Ce que nous connaissons sur la solution des systèmes linéaires se traduit par les parties (a) et (b) du théorème suivant :

Théorème 2. *Considérons un système linéaire de* ***m équations*** *en* ***n inconnues*** *avec matrice des coefficients A, membre de droite $\mathbf{b}$, et matrice augmentée $\widehat{A} = \left(\, A \; \middle| \; \mathbf{b} \, \right)$.*

(a) *Pour un membre de droite $\mathbf{b}$ particulier, le système linéaire a une solution si et seulement si on a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \widehat{A}$.*

(b) *Quand elles existent, les solutions dépendent de $n - \operatorname{rg} A$ paramètres indépendants.*

(c) *On a $\operatorname{rg} A \leq m$ et $\operatorname{rg} A \leq n$.*

La partie (c) se déduit du Théorème 1 ci-dessus.

Quand on réduit la matrice augmentée d'un système linéaire à sa forme échelonnée en lignes, parfois on termine avec une matrice contenant autant de pivots que de lignes dans la partie gauche de la matrice, comme celle-ci :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 4 & 15 & * \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -6 & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \end{array} \right)$$

On peut résoudre un tel système échelonné quelque soit le membre de droite.

Mais parfois on termine avec une matrice augmentée échelonnée avec moins de pivots que de lignes dans la partie gauche, comme celle-ci :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 4 & 15 & * \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -6 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

La dernière ligne correspond à une équation de la forme $0 = *$, où le $*$ dépend du membre de droite $\mathbf{b}$ du système non échelonné du départ. Pour certains $\mathbf{b}$, le $*$ prend la valeur 0, et le système a des solutions. Pour d'autres $\mathbf{b}$, le $*$ est non nul, et le système n'a pas de solutions.

Or quand on a un système linéaire de $\boldsymbol{m}$ **équations** en $\boldsymbol{n}$ **inconnues** avec matrice des coefficients A, le nombre de pivots dans la partie gauche de la matrice échelonnée est $\operatorname{rg} A$, et le nombre de lignes est m. Donc les deux situations ci-dessus correspondent à d'abord $\operatorname{rg} A = m$, et ensuite $\operatorname{rg} A < m$. On a donc le théorème suivant :

Théorème 3. *Considérons un système linéaire de* **m équations** *en* **n inconnues** *avec matrice des coefficients A, membre de droite $\mathbf{b}$, et matrice augmentée $\widehat{A} = \left(A \mid \mathbf{b} \right)$.*

(a) *Quand on a $\operatorname{rg} A = m$, le système linéaire a des solutions quelque soit le membre de droite $\mathbf{b}$.*

(b) *Quand on a $\operatorname{rg} A < m$, le système linéaire a des solutions pour certains membres de droite $\mathbf{b}$ mais pas pour tout membre de droite.*